

Arranjos e Combinações Simples

Arranjos simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) são os diferentes agrupamentos ordenados que se podem formar com p dos n elementos dados.

Indica-se por $A_{n,p}$ ou A_{np} o total desses agrupamentos, que calculamos assim:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \text{ ou}$$

Exemplos:

$A_{8,4}$ (onde $n = 8$ e $p = 4$)

$$A_{8,4} = \frac{8!}{(8-4)!}$$

$$A_{8,4} = \frac{8!}{4!}$$

$$A_{8,4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!}$$

$$A_{8,4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$A_{8,4} = 1680$$

Combinações Simples

Combinações simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados.

Indica-se por $C_{n,p}$, C_{np} o número total de combinações de n elementos tomados p a p

e calcula-se por $C_{n,p} =$

(Observação: Por serem subconjuntos, a ordem dos elementos não importa.)

Exemplos:

$C_{6,2}$ (onde $n = 6$ e $p = 2$)

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!}$$

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!4!}$$

$$C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!4!}$$

$$C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}$$

$$C_{6,2} = \frac{30}{2}$$

$$C_{6,2} = 15$$

Por Marcos Noé

Graduado em Matemática

Fonte: Brasil Escola - <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/arranjos-e-combinacoes-simples.htm>

LISTA DE EXERCÍCIOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

1) O que é maior: 3^{100} ou $100!$? Justifique.

2) Encontre um número natural n tal que $n! - 12 \cdot (n-1)! = 0$.

3) Quantos são os anagramas da palavra ESTUDANTE?

4) Simplifique as expressões:

a) $\frac{50!}{49!}$

b) $\frac{n!}{(n-1)!}$

c) $\frac{100! + 99!}{99!}$

d) $\frac{(2n)!}{(2n-1)!}$

5) Considere os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9. Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados?

6) Em relação à questão anterior, responda:

a) Quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados?

b) Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados sabendo que pelo menos um deles se repete?

7) Uma prova é constituída por 10 questões do tipo “verdadeiro ou falso”. Se um aluno chuta cada uma das questões, qual o número total de maneiras de apresentar o gabarito?

8) Lançando uma mesma moeda 5 vezes consecutivamente, qual o número total de possíveis resultados?

9) Usando apenas os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, responda:

a) Quantos números de 3 algarismos podemos formar?

b) Quantos números ímpares de 3 algarismos podemos formar?

c) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

d) Quantos números ímpares de 3 algarismos ímpares podemos formar?

e) Quantos números com 3 algarismos ímpares podemos formar?

f) Quantos números com 3 ímpares e distintos podemos formar?

10) Quantos números naturais de quatro ou cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 9?

11) Quantos números de 5 algarismos distintos há em nosso sistema de numeração?

12) Qual a quantidade de números inteiros compreendidos entre 30.000 e 65.000 que podemos formar utilizando somente os algarismos 2, 3, 4, 6 e 7, de modo que não figurem algarismos repetidos?

13) De quantas maneiras três mães e seus respectivos três filhos podem ocupar uma fila com seis cadeiras, de modo que cada mãe sente junto de seu filho?

14) Com os elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ são formados números com três algarismos distintos. Qual a quantidade de números formados, cuja soma dos algarismos é um número par?

15) Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para tirar a foto?

16) Um código de barras para leitura ótica é constituído por 12 barras, brancas ou pretas. A primeira e a última barra, necessariamente devem ser pretas. Nenhum código, tem todas barras de uma só cor. Quantos desses códigos, distintos entre si, podem ser formados?

17) A quantidade de números pares de 5 algarismos, sem repetição, que podemos formar com os dígitos 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 é igual a:

18) Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e seis vagões distintos, sendo um deles restaurante. Sabendo-se que a locomotiva

deve ir à frente e que o vagão-restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, Qual a quantidade de formas diferentes de montar a composição?

19) Chamam-se “palíndromos” números inteiros que não se alteram quando é invertida a ordem de seus algarismos (por exemplo: 383, 4.224, 74.847). Qual o número total de palíndromos de cinco algarismos?

20) Quantos números ímpares de 4 algarismos, sem repetição, podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

21) Você dispõe de 9 livros: 3 de Matemática, 4 de Física e 2 de Química. Todos são distintos.

a. Qual o número de maneiras distintas de dispor esses 9 livros lado a lado numa mesma prateleira?

b. Qual o número de maneiras de dispor esses livros deixando juntos os da mesma disciplina?

22) Considerando as letras da palavra FORTE, calcule:

a) o número total de anagramas que podem ser formados com as 5 letras;

b) o número de anagramas que começam e terminam por consoante.

23) Cinco rapazes e duas moças devem ocupar os sete lugares de uma mesma fila de um cinema.

a) De quantas maneiras distintas eles podem ocupar esses sete lugares?

b) De quantos modos eles podem ocupar esses sete lugares se as moças devem ficar juntas?

c) De quantos modos eles podem ocupar esses sete lugares se as moças devem ficar separadas?

24) Permutam-se de todos os modos possíveis os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 e escrevem-se assim números com cinco algarismos distintos, colocando-os em ordem crescente. Qual a posição ocupada pelo número 53.719?

25) Calcule:

a) $A_{7,3}$ b) $A_{5,2}$ c) $A_{10,5}$

26) Quantos números naturais de 2 algarismos distintos podemos formar com os algarismos de 1 até 9?

27) De quantas maneiras 7 meninos podem sentar-se num banco que tem apenas 4 lugares?

28) Considerem-se todos os anagramas da palavra MORENA. Quantos deles têm as vogais juntas?

29) Ao final da aula, cada aluno de uma turma de 20 alunos deverá apertar a mão de todos os colegas uma única vez. Quantos apertos de mão existirão no total?

30) Resolva a equação $C_{n,2} = 10$

31) Sobre uma circunferência, são marcados sete pontos distintos. Quantos triângulos podemos formar tomando estes pontos como vértices?

32) Um grupo de 10 amigos vão a um parque para brincar na montanha russa. Neste brinquedo existem cinco cadeiras com dois lugares em cada uma. De quantas formas diferentes eles podem ocupar as cadeiras?

33) Considere 6 pontos distintos marcados na reta r e 4 pontos distintos marcados na reta s . Sabendo-se que r e s são retas paralelas, qual o número total de triângulos que podem ser formados com vértices nesses pontos?

34) Quantos números diferentes obtemos reagrupando os algarismos do número 718.844?

35) Qual o número de anagramas da palavra HONESTO, começando e terminando por consoante?

36) Quantos subconjuntos distintos de 10 elementos de um conjunto de 13 elementos é possível formar?

37) Sobre uma mesa são colocadas em linha 6 moedas. Qual o número total de modos possíveis pelos quais podemos obter 2 caras e 4 coroas voltados para cima?

38) Dispondo-se de abacaxi, acerola, goiaba, laranja, maçã, mamão e melão; calcule de quantos sabores diferentes pode-se preparar um suco, usando-se três frutas distintas.

39) Numa Câmara de Vereadores, atuam 6 vereadores do partido A, 5 vereadores do partido B e 4 vereadores do partido C. Qual o número de comissões de 7 vereadores que podem ser formadas, devendo cada comissão ser constituída de 3 vereadores do partido A, 2 vereadores do partido B e 2 vereadores do partido C?

40) Considere todos os produtos de três fatores distintos que podem ser obtidos com os elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$. Quantos deles são pares?

41) Numa primeira fase de um campeonato de futebol, cada equipe joga uma vez contra as demais. Nessa fase foram realizados 78 jogos. Quantas eram as equipes participantes do campeonato?

42) Uma empresa vai fabricar cofres com senhas de 4 letras, usando 18 consoantes e 5 vogais. Se cada senha deve começar com uma consoante e terminar com uma vogal, sem repetir letras, qual o número de senhas possíveis?

43) Qual o número de soluções inteiras e não-negativas da equação $x + y + z + w = 10$?

44) O símbolo máximo das Olimpíadas é formado por cinco anéis nas cores Azul, Preto, Vermelho, Amarelo e Verde. Se não houvesse uma posição fixa para cada cor, de quantas formas diferentes os anéis poderiam ser pintados, cada um com uma das cinco cores acima, mas mantendo sempre, na parte de baixo, as cores Amarelo e Verde?

45) De quantas formas diferentes, 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras disponíveis num cinema?

46) De um baralho comum de 52 cartas, sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas. De quantos modos isso pode ser feito, considerando-se que a primeira carta deva ser de copas e a segunda carta não deva ser um rei?

47) Em uma certa comunidade, dois homens sempre se cumprimentam (na chegada) com um aperto de mão e se despedem (na saída) com outro aperto de mão. Um homem e uma mulher

se cumprimentam com um aperto de mão, mas se despedem com um aceno. Duas mulheres só trocam acenos, tanto para se cumprimentarem quanto para se despedirem. Em uma comemoração, na qual 37 pessoas almoçaram juntas, todos se cumprimentaram e se despediram na forma descrita acima. Quantos dos presentes eram mulheres, sabendo que foram trocados 720 apertos de mão?

48) Quantos são os anagramas da palavra OLIMPIADA em que as vogais não aparecem todas juntas?

49) Numa turma com 32 pessoas, 5 serão escolhidas para participar de uma viagem. Qual é o número de maneiras de escolher essas 5 pessoas sabendo que duas dessas pessoas só irão se forem juntas?

50) Desenvolva a potência de binômios:

- a) $(x + y)^5$ b) $(2x - \alpha)^5$
c) $(2x + 1)^4$ d) $(x - 2y)^5$

51) No desenvolvimento de $(a - 1)^{20}$ obtenha o coeficiente do termo em a^{17} .

52) Determine o coeficiente do termo médio no desenvolvimento de $(2x^3 + y^2)^8$.

53) Qual o termo independente de x no desenvolvimento do binômio $\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^{12}$?

54) No desenvolvimento de $(1 + 2x^2)^6$, qual o coeficiente de x^8 ?

55) Qual o termo central de $(x - 3)^6$ quando se ordena os monômios colocando em ordem crescente os expoentes de x ?

56) Um dos termos no desenvolvimento de $(x + 3a)^5$ é $360x^3$. Qual o valor de a ?

CURSO PRÉ-VESTIBULAR COMUNITÁRIO
PROFESSOR: GUILHERME SADA RAMOS – “GUIBA”
DISCIPLINA: MATEMÁTICA B

EXERCÍCIOS DE REVISÃO - ANÁLISE COMBINATÓRIA

- 1) Quantos anagramas possui a palavra DOÇURA?
- 2) Uma classe de 20 alunos precisa escolher um líder e um ajudante para organizar a turma para a gincana da escola. De quantos modos a classe pode fazer esta escolha?
- 3) Considere que, no Campeonato Brasileiro, apenas 10 times tenham condições de atingir o G-4 (conjunto das quatro primeiras posições da tabela), que dá uma vaga ao time na Taça Libertadores da América. De quantas maneiras o Brasil pode mandar seus 4 representantes à Libertadores?
- 4) No problema anterior, de quantas maneiras podemos ter os 4 primeiros colocados no Campeonato Brasileiro?
- 5) De quantas maneiras poderemos permutar as letras da palavra BALADA, de modo que B e A sejam as duas primeiras letras, nessa ordem?
- 6) Um partido tem 5 nomes distintos para compor a chapa (prefeito e vice-prefeito) que vai concorrer à prefeitura municipal. De quantos modos o partido pode montar a chapa?
- 7) Cada 2 pontos determinam uma reta. Quantas retas são determinadas pelo conjunto de vértices de um bloco retangular?
- 8) Na primeira fase de um certo torneio de futebol, as equipes são agrupadas em 5 grupos de 8 equipes cada. Em cada grupo, todos os times jogam contra todos, uma única vez. Quantos jogos são realizados em cada grupo?
- 9) Considere o mesmo torneio do exercício anterior. Se fossem realizados 45 jogos em um único grupo, quantas equipes compõem este grupo?
- 10) Num ônibus, há 6 lugares vagos. Se 3 pessoas entram no ônibus, de quantas maneiras elas podem sentar-se no ônibus?
- 11) Na Mega-Sena, cada jogador marca 6 das 60 dezenas no seu bilhete e ganha na quina se acertar exatamente 5 dezenas, das 6 sorteadas. Quantos sorteios distintos poderão dar-lhe o prêmio da quina?
- 12) (Vunesp) Quatro amigos – Pedro, Luísa, João e Rita – vão ao cinema, sentando-se em quatro lugares consecutivos na mesma fila. O número de maneiras que os quatro podem ficar dispostos de forma que Pedro e Luísa fiquem sempre juntos e João e Rita fiquem sempre juntos é:

a) 2 b) 4 c) 8 d) 16 e) 24
- 13) Certo dia, o pai de Carlos emprestou-lhe o cartão de crédito e revelou a senha do mesmo, porém Carlos esqueceu a senha revelada. Apenas lembrou-se de que os 4 dígitos da senha eram distintos e de que o segundo dígito era igual a 4 vezes o primeiro.

Tentando chutar a senha do cartão de seu pai, até quantas vezes Carlos pode errar esse chute, sabendo que ele nunca repete um chute errado?

RESPOSTAS:

- 1) 720
- 2) 380
- 3) 210
- 4) 5040
- 5) 12
- 6) 20
- 7) 28
- 8) 28
- 9) 10
- 10) 120
- 11) 54
- 12) C
- 13) 111



CONJUNTOS e CONJUNTOS NUMÉRICOS – QUESTÕES

1. (ENEM) Numa prova de matemática de duas questões, 35 alunos acertaram somente uma questão, 31 acertaram a primeira, 8 acertaram as duas e 40 erraram a segunda questão. Então, o número de alunos que fizeram essa prova foi:

- a) 43 b) 48 c) 52 d) 56 e) 60

2. (ENEM) Uma pessoa ia gastar R\$ 396,00 para comprar x caixas de um determinado produto. Ao receber o pedido de compra, a empresa fornecedora fez um desconto de R\$ 8,00 no preço de cada caixa. Devido a isto, a pessoa conseguiu comprar duas caixas a mais, pagando os mesmos R\$ 396,00. Quantas caixas do produto tal pessoa comprou?

- a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

3. (ENEM) Em relação aos principais conjuntos numéricos, é **CORRETO** afirmar que:

- a) Todo número racional é natural, mas nem todo número natural é racional.
b) Todo número inteiro é natural, mas nem todo número natural é inteiro.
c) Todo número real é natural, mas nem todo número natural é real.
d) Todo número racional é inteiro, mas nem todo número inteiro é racional.
e) Todo número irracional é real.

4. (UFBA) Em uma enquete, várias pessoas foram entrevistadas acerca de suas preferências em relação a três esportes, Volei (**V**), Basquete (**B**) e Tênis (**T**), cujos dados estão indicados na tabela a seguir:

ESPORTE	Nº DE PESSOAS
V	300
B	260
T	200
V e B	180
V e T	130
B e T	100
V, B e T	50
Nenhum	40

De acordo com esses dados, é correto afirmar que, nessa enquete, o número de pessoas entrevistadas foi:

- a) 400 b) 440 c) 490 d) 530 e) 570

5. (UFC) Sejam M e N conjuntos que possuem um único elemento em comum. Se o número de subconjuntos de M é igual ao dobro do número de subconjuntos de N , o número de elementos do conjunto $M \cup N$ (união) é:

- a) o triplo do número de elementos de M . b) o triplo do número de elementos de N .
c) o quádruplo do número de elementos de M . d) o dobro do número de elementos de M .
e) o dobro do número de elementos de N .

6. (UFMG) Em uma pesquisa de opinião, foram obtidos estes dados:

- 40% dos entrevistados leem o jornal A.
- 55% dos entrevistados leem o jornal B.
- 35% dos entrevistados leem o jornal C.
- 12% dos entrevistados leem os jornais A e B.
- 15% dos entrevistados leem os jornais A e C.
- 19% dos entrevistados leem os jornais B e C.
- 7% dos entrevistados leem os três jornais.
- 135 pessoas entrevistadas não leem nenhum dos três jornais

Considerando-se esses dados, é correto afirmar que o número total de entrevistados foi:

- a) 1.200 b) 1.500 c) 1.250 d) 1.350

7. (ESPM) Os números naturais M e N são escritos, na base 10, com os mesmos dois algarismos, porém em posições invertidas. A diferença entre o maior e o menor é uma unidade a menos que o menor deles. Podemos afirmar que o valor de $M + N$ é:

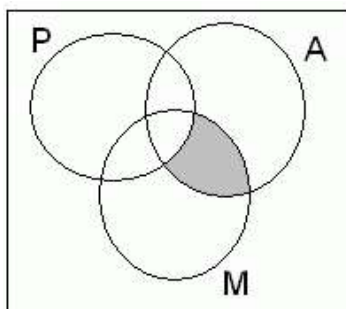
- a) 102 b) 67 c) 125 d) 98 e) 110

8. (PUC) Se, $A =]-2; 3]$ e $B = [0; 5]$ então os números inteiros que estão em $(B - A)$ são:

- a) -1 e 0 b) 1 e 0 c) 4 e 5 d) 3, 4 e 5 e) 0, 1, 2 e 3

9. (ENEM) Para a identificação de pacientes com sintomas de gripe influenza A, a Anvisa (Agência Nacional de Vigilância Sanitária) informou hoje que os voos procedentes do Reino Unido, Espanha e Nova Zelândia também serão inspecionados por uma equipe da agência e por médicos da Empresa Brasileira de Infraestrutura Aeroportuária (Infraero). Inicialmente, apenas os voos vindos do México, Canadá e Estados Unidos eram inspecionados. A decisão foi tomada durante reunião da Anvisa com representantes das companhias aéreas, da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac) e da Infraero, no Aeroporto Internacional de Cumbica, em Guarulhos, na Grande São Paulo.

(Adaptado de: <http://noticias.uol.com.br/cotidiano/2009/04/28/ult5772u3774.jhtm>, Acesso em: 09.05.2009.)



Em um voo proveniente de Miami, a Anvisa constatou que entre todas as pessoas a bordo (passageiros e tripulantes) algumas haviam passado pela cidade do México. No diagrama, U representa o conjunto das pessoas que estavam nesse voo; P o conjunto dos passageiros; M o conjunto das pessoas que haviam passado pela cidade do México e A o conjunto das pessoas com sintomas da gripe influenza A. Considerando verdadeiro esse diagrama, conclui-se que a região sombreada representa o conjunto das pessoas que, de modo inequívoco, são aquelas caracterizadas como:

- a) passageiros com sintomas da gripe que não passaram pela cidade do México.
b) passageiros com sintomas da gripe que passaram pela cidade do México.
c) tripulantes com sintomas da gripe que passaram pela cidade do México.
d) tripulantes com sintomas da gripe que não passaram pela cidade do México.
e) tripulantes sem sintomas da gripe que passaram pela cidade do México.

10. (UFSE) Os senhores A, B e C concorriam à liderança de certo partido político. Para escolher o líder, cada eleitor votou apenas em dois candidatos de sua preferência. Houve 100 votos para A e B, 80 votos para B e C e 20 votos para A e C. Em consequência:

- a) venceu A, com 120 votos b) venceu A, com 140 votos c) A e B empataram em primeiro lugar
d) venceu B, com 140 votos e) venceu B, com 180 votos

11. (PUC) Se x e y são números reais tais que $x = (0,25)^{0,25}$ e $y = 16^{-0,125}$, é verdade que:

- a) $x = y$ b) $x > y$ c) $x \cdot y = 2\sqrt{2}$ d) $x - y$ é um número irracional e) $x + y$ é um número racional não inteiro

12. (UERJ) Em uma escola circulam dois jornais: *Correio do Grêmio* e *O Estudante*. Em relação à leitura desses jornais, por parte dos 840 alunos da escola, sabe-se que:

- 10% não leem esses jornais; - 520 leem o jornal *O Estudante*; - 440 leem o jornal *Correio do Grêmio*.

Calcule o número total de alunos do colégio que leem os dois jornais.

- a) 201 b) 202 c) 203 d) 204 e) 205

13. (UERJ) Um grupo de alunos de uma escola deveria visitar o Museu de Ciências e o Museu de História da cidade. Quarenta e oito alunos foram visitar pelo menos um desses museus. 20% dos que foram ao museu de Ciências visitaram o de História, 25% dos que foram ao museu de História visitaram o de Ciências. Calcule o número de alunos que visitaram ambos.

- a) 18 b) 4 c) 20 d) 8 e) 6

Respostas: 1) e; 2) d; 3) e; 4) b; 5) c; 6) b; 7) e; 8) c; 9) c; 10) e; 11) a; 12) d. 13) e.

EXERCÍCIOS PROGRESSÃO ARITMÉTICA

RAZÃO, CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO DE UMA PA

01. (FATES) Considere as seguintes sequências de números:

A: 3, 7, 11, ... B: 2, 6, 18, ... C: 2, 5, 10, 17, ...

Os números que continuam cada uma das sequências, na ordem dada, devem ser respectivamente:

- A) 15, 36 e 24 D) 17, 54 e 26
B) 15, 54 e 24 E) 17, 72 e 26
C) 15, 54 e 26

02. (FEFISA) Se numa sequência temos que $f(1) = 3$ e $f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 1$, então o valor de $f(4)$ é:

- A) 4 C) 15 E) 42
B) 7 D) 31

03. Considere a sequência 2, 7, 14, 23, A soma de seus dois próximos termos é:

- A) 34 C) 47 E) 81
B) 37 D) 69

04. Das afirmações abaixo, assinale a que for verdadeira.

- A) A PA de razão 3, cujo primeiro termo é 5 é decrescente.
B) A PA de razão -3 cujo primeiro termo é 10 é crescente.
C) A PA onde $a_5 = 10$ e $a_{20} = 50$ é decrescente.
D) A PA onde $a_{20} = 10$ e $a_{50} = 10$ é crescente.
E) Uma PA é crescente se $a_n < a_{n+k}$.

05. (PUC-SP) Considere as sequências (1, 4, 7, 10, ..., 67) e (8, 12, 16, 20, ..., 96). O número de termos comuns a essas duas sequências é:

- A) 5 C) 7 E) 9
B) 6 D) 8

06. Uma sequência de triângulos é tal que no primeiro a base é 3 cm e a altura 5 cm. A partir do segundo, em cada triângulo, a base aumenta 5 cm e a altura 3 cm. A área do 5º desses triângulos é:

- A) 7,5 cm² C) 71,5 cm² E) 195,5 cm²
B) 15 cm² D) 126 cm²

O TERMO GERAL E O TOTAL DE TERMOS DE UMA PA

07. Determine o primeiro termo de uma progressão aritmética de razão -5 cujo décimo termo vale 12.

08. Em uma progressão aritmética sabe-se que $a_4 = 12$ e $a_9 = 27$. O décimo quinto termo dessa progressão é:

- A) 42 C) 48 E) 54
B) 45 D) 51

09. O vigésimo elemento da sucessão aritmética (12, 17, 22, 27, ...) é:

- A) 95 C) 103 E) 113
B) 97 D) 107

10. (FUVEST-SP) Determine quantos múltiplos de 9 há entre 100 e 1 000.

11. A sequência (25, 30, 35, ..., 5000, 5005) possui k termos. O valor k é:

- A) 5000 C) 999 E) 997
B) 1000 D) 998

12. Ao financiar uma casa em 20 anos, José fechou o seguinte negócio com a financeira: em cada ano, o valor das 12 prestações deve ser igual e o valor da prestação mensal em um determinado ano é R\$ 40,00 a mais que o valor pago, mensalmente, no ano anterior. Considerando que o valor da prestação no primeiro ano é de R\$ 350,00, determine o valor da prestação no último ano.

13. O número 15 possui m múltiplos com 3 dígitos cada. O valor m é:

- A) 30 C) 50 E) 70
B) 40 D) 60

14. Uma sucessão de números igualmente distantes um após o outro, tem como décimo e vigésimo termos, respectivamente, os números 43 e 83. Qual é o trigésimo primeiro termo desta sucessão?

- A) 119 C) 127 E) 135
B) 123 D) 131

15. A sequência 15, 5, ..., -2015 possui x termos. O valor x é:

- A) 203 C) 205 E) 207
B) 204 D) 206

TERMO MÉDIO E INTERPOLAÇÃO DE TERMOS NA PA

16. Seja (a, b, c) uma progressão aritmética de razão real e de termos não nulos. Sendo assim podemos sempre afirmar que:

- A) $a + b = b + c$ D) $a - 2b + c = 0$
B) $b = a + c$ E) $2c = a + b$
C) $b^2 = ac$

17. O valor m para que $2m - 3$, $2m + 1$, $3m + 1$ sejam, nesta ordem, três números em PA deve ser:

- A) 1 C) 3 E) 5
B) 2 D) 4

18. Sejam x, y e z números reais tais que a sequência (x, 1, y, 1/4, z) forme, nesta ordem, uma progressão aritmética. O valor da soma x + y + z é:

- A) -3/8 C) 15/8 E) -19/8
B) 21/8 D) 2

19. Interpolando-se 10 meios aritméticos entre 2 e 57 obtém-se uma PA cujo sétimo termo igual:

- A) 22 C) 27 E) 35
B) 25 D) 32

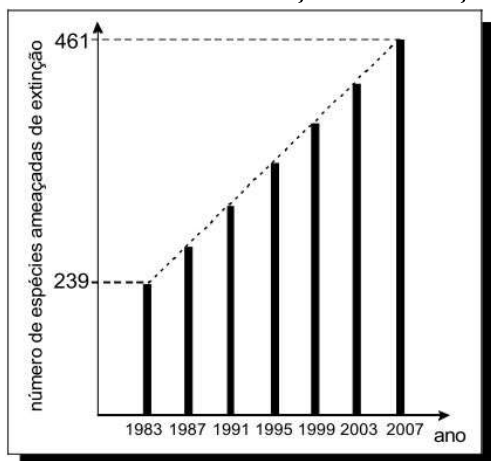
20. Uma progressão aritmética finita possui 39 termos. O último é igual a 196 e o termo central igual a 81. Qual é o valor do primeiro termo?

- A) -34 C) 14 E) 34
B) -14 D) -4

21. Ricardo interpolou, aritmeticamente, 20 valores entre 2 e 149, enquanto Paula interpolou 22 valores entre 3 e 91. Em seguida eles observaram que haviam repetido alguns valores. A soma dos valores comuns é:

- A) 113 C) 133 E) 153
B) 123 D) 143

22. O gráfico abaixo, obtido a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.



Admitindo-se que tenha se mantido nos últimos anos, a tendência média de crescimento mostrada no gráfico, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2019 será igual a:

- A) 465
B) 493
C) 498
D) 572
E) 609

REPRESENTAÇÃO DOS TERMOS DE UMA PA

23. Numa PA decrescente de 10 termos, a soma dos 3 primeiros é igual a 21 e o produto, 231. Qual é o valor do último termo?

- A) -37
B) -25
C) -1
D) 25
E) 47

24. A soma dos cinco primeiros termos de uma PA é igual a -30, enquanto a soma dos 10 primeiros termos é igual a 40. O décimo quinto termo desta PA é:

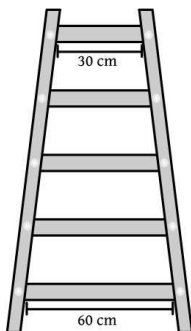
- A) 33
B) 37
C) 42
D) 48
E) 55

25. Numa PA, a soma do segundo termo com o quinto termo dá 30. Ao mesmo tempo, a soma do quarto com o oitavo resulta em 48. Somando-se o sexto com o décimo primeiro termo obtemos:

- A) 57
B) 59
C) 62
D) 66
E) 71

26. Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme a figura ao lado. Os cinco degraus serão obtidos cortando-se uma única peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser:

- A) 144
B) 180
C) 210
D) 225
E) 240



27. Os três primeiros termos de uma PA crescente são tais que a soma deles é 69. Ao mesmo tempo, o dobro do menor, somado ao maior resulta em 61. A razão dessa PA e seu décimo termo são, respectivamente:

- A) 8; 87
B) 8; 95
C) 7; 78
D) 9; 76
E) 9; 74

SOMA DOS TERMOS DE UMA PA

28. (PUC-RJ) Tem-se uma progressão aritmética de 20 termos onde o 1º termo é igual a 5. A soma de todos os termos dessa progressão aritmética é 480. O décimo termo é igual a:

- A) 20
B) 21
C) 22
D) 23
E) 24

29. A soma de todos os números naturais ímpares de 3 algarismos é:

- A) 220000
B) 247500
C) 277500
D) 450000
E) 495000

30. Numa progressão aritmética de razão r e primeiro termo 3, a soma dos primeiros n termos é $3n^2$. A razão dessa progressão é:

- A) 2
B) 3
C) 6
D) 7
E) 9

31. A soma dos dez primeiros termos de uma PA de primeiro termo 1,87 e de razão 0,004 é:

- A) 18,88
B) 9,5644
C) 9,5674
D) 18,9
E) 21,3

32. Em uma PA de razão 3, $a_1 = 2$ e $S_n = 57$. O valor n é:

- A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

33. A soma $105 + 110 + 115 + \dots + 2010 + 2015$, vale:

- A) 405890
B) 415980
C) 2015 . 379
D) 2100 . 397
E) 1060 . 383

34. A soma dos termos de PA é dada por $S_n = n^2 - n$, para $n = 1, 2, 3, \dots$. Então o 100º termo dessa PA vale:

- A) 198
B) 900
C) 810
D) 1020
E) 998

35. Um ciclista percorre 40 km na primeira hora; 34 km na segunda hora, e assim por diante, formando uma progressão aritmética. Quantos quilômetros percorrerá em 6 horas?

- A) 130 km
B) 140 km
C) 150 km
D) 160 km
E) 170 km

36. A soma dos dez primeiros termos de uma PA é igual a -35. O último termo é igual ao número de termos. A razão dessa PA é:

- A) 3
B) 4
C) 6
D) 7
E) 9

37. Em certa PA tanto o primeiro termo quanto a razão são iguais ao número de termos. Sabe-se que a soma do segundo com o quarto termo dessa PA é igual a 72. A soma dos dez primeiros termos dessa PA vale:

- A) 220
B) 440
C) 660
D) 880
E) 960

38. A equação $(5 + x) + (10 + x) + \dots + (100 + x) = 1110$ tem solução:

- A) $\{0\}$
B) $\{1\}$
C) $\{2\}$
D) $\{3\}$
E) $\{4\}$

Gabarito (Lista Básica PA)

01. C	02. D	03. E
04. E	05. A	06. E
07. 57	08. B	09. D
10. 100	11. E	12. R\$ 1100,00
13. D	14. C	15. B
16. D	17. D	18. C
19. D	20. A	21. E
22. D	23. B	24. C
25. D	26. D	27. A
28. D	29. B	30. C
31. A	32. B	33. E
34. A	35. C	36. A
37. C	38. D	

Módulo de Juros e Porcentagem

Juros Simples e Compostos

Sétimo Ano



Juros Simples e Compostos

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Um investidor quer aplicar a quantia de R\$ 800,00 por 3 meses, a uma taxa de 8% ao mês (a.m.) em juros simples, para retirar no final deste período. Quanto ele irá retirar?

Exercício 2. Qual é a taxa mensal de juros simples que faz um capital de R\$ 9.500,00 produzir um montante de R\$ 11.900,00 ao fim de 1 ano de aplicação?

Exercício 3. O preço à vista de um eletrodoméstico é R\$ 350,00. Dando-se uma entrada de R\$ 80,00, o restante será pago com um cheque com vencimento para 3 meses depois da compra incluindo um acréscimo de juros simples de 4% ao mês. Qual será o valor do cheque?

Exercício 4. Esmeraldino aplicou R\$ 800,00, a juros simples, a uma taxa de 2,5% ao mês e, ao final de um certo tempo, recebeu R\$ 1.080,00. Quanto tempo ela deixou o dinheiro aplicado a essa taxa?

Exercício 5. Determine quanto renderá, em juros simples, um capital de R\$ 60.000,00 aplicado à taxa de 24% ao ano, durante sete meses.

Comentário para professores:. Sugerimos apenas após os problemas iniciais, a introdução das fórmulas:

$$M = C + J \text{ e } J = Cin,$$

onde M é o montante, C o capital, i a taxa de juros e n o prazo do investimento.

Exercício 6. A que taxa mensal de juros simples um capital de R\$ 500,00, aplicado durante 10 meses, produz R\$ 150,00 de juros?

Exercício 7. Mário devia, em seu cartão de crédito, R\$ 2.000,00. Como não conseguiu pagar, em dois meses essa dívida aumentou para R\$ 2.880,00. Nesse caso, qual foi a taxa de juros simples cobrada mensalmente pelo cartão de crédito?

Exercício 8. Um certo capital foi aplicado por 5 meses. Ao fim desse prazo, só de juros simples, o aplicador recebeu o triplo do dinheiro. Qual é a taxa mensal dessa aplicação?

Exercício 9. Por um empréstimo de R\$ 80000,00, à taxa de $i\%$ ao mês, paga-se, de uma única vez, após 2 meses, o montante de R\$ 115200,00. Por terem sido aplicados juros compostos, qual a taxa mensal aplicada?

Exercício 10. Um capital quadruplica em 2 meses ao se utilizar de capitalização composta. Qual a taxa mensal aplicada?

Exercício 11. Uma aplicação de R\$ 3.000,00 rendeu R\$ 2.370,00 em 10 meses. Qual a taxa mensal composta de juros dessa operação?

Exercício 12. O preço do cento laranja teve dois aumentos consecutivos: 10% e 20%. Se hoje o cento da laranja custa R\$5,28, determine o seu preço antes dos aumentos.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 13. O preço de certa mercadoria sofre anualmente um acréscimo de 100%. Supondo que o preço atual seja R\$ 100,00, qual o preço daqui a 3 anos?

Exercício 14. João fez um empréstimo de R\$ 800,00 em uma financeira, que cobra uma taxa de juros de 10% ao mês, comprometendo-se a saldar a dívida em dois meses. No fim do primeiro mês, Pedro pagou à financeira uma parcela de R\$ 580,00. Assim sendo, qual o valor que ficará para João pagar ao final do segundo mês?

Exercício 15. Maria pegou no banco um empréstimo de R\$ 2000,00, que cobra uma taxa de juros de 5% ao mês, comprometendo-se a saldar a dívida em quatro meses. No fim do primeiro mês, Maria pagou uma parcela de R\$ 600,00. No fim do segundo mês, ela pagou R\$ 575,00. No fim do terceiro mês, pagou R\$ 550,00. Assim sendo, qual o valor que ficará para Maria pagar ao final do quarto mês?

Exercício 16. Duas pessoas fizeram um empréstimo de uma mesma quantia por dois meses, nas seguintes condições:

- i) A primeira, a juros compostos de 2% a.m.
- ii) A segunda, a juros simples de $x\%$ a.m.

Sabendo-se que, ao quitar a dívida, as duas pagaram o mesmo valor, qual o valor de x ?

Exercício 17. Uma pessoa aplicou metade do seu capital à taxa de 30% ao semestre no regime de juros compostos e a outra metade à taxa de 27% ao quadrimestre no sistema de juros simples e obteve ao final de um ano um montante de R\$ 4.200,00. Qual o capital inicial desta pessoa?

Exercício 18. Uma quantia de x reais foi aplicada a juros compostos de 1% ao mês. Ao final de 10 meses, foi feito o resgate total da aplicação, obtendo-se y reais. Qual a razão $\frac{y}{x}$?

Exercício 19. Um investidor fez uma aplicação a juros simples de 10% mensal. Depois de dois meses, retirou capital e juros e os reaplicou a juros compostos de 20% mensal, por mais dois meses e, no final do prazo, recebeu R\$ 1728,00. Qual o valor do capital inicial?

Exercício 20. Daqui a seis meses você deve saldar uma dívida de R\$ 520,00. Que importância deve aplicar hoje ao juro simples de 5% ao mês para que, no prazo devido, você esteja com a quantia devida?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 21. Se o comprimento de um retângulo é aumentado de 20% e sua largura é aumentada de 50%, de quanto aumenta sua área?

Exercício 22. Se um automóvel custa hoje R\$ 45000,00 e a cada ano sofre uma desvalorização de 4%, qual o seu valor, em reais, daqui a dez anos?

Exercício 23. Um capital aplicado no prazo de dois anos, a uma taxa de juros compostos de 40% ao ano, resulta no montante de R\$ 9800,00. Sendo $x\%$ a taxa anual de juros simples que, aplicada ao mesmo capital durante o mesmo prazo, resultará no mesmo montante, determine x .

Exercício 24. Um carro foi testado durante 10 dias para verificar o bom desempenho e poder ser lançado no mercado com bastante sucesso. No primeiro dia do teste, ele percorreu 80km e, nos dias subsequentes, houve um aumento de 5% da quilometragem rodada em relação à quilometragem do dia anterior. Nessas condições, qual foi a quilometragem do último dia de testes?

Exercício 25. Um país contratou em 1839 um empréstimo de 1 milhão de dólares, para pagar em cem anos à taxa de juros de 9% ao ano. Por problemas de balança comercial, nada foi pago até hoje, e dívida foi sendo “rolada”, com capitalização anual de juros. Qual o valor valores abaixo está mais próximo do valor da dívida em 1999?
Para os cálculos adote $(1,09)^8 \cong 2$.

Exercício 26. Com uma nova invenção, o custo da produção de um produto foi reduzido em 50%. Após uma isenção de impostos, o custo da produção desse mesmo produto foi reduzido em 40% e, em seguida, com a diminuição das tarifas de energia, o custo ainda foi reduzido em 10%. Qual foi a redução percentual do custo da produção desse produto?

Exercício 27. Sabe-se que 10% de uma certa população está infectada por um vírus. Um teste para identificar a presença do vírus acerta 90% das vezes quando aplicado em uma pessoa infectada, e apresenta 80% de acertos quando aplicado em uma pessoa que não é portadora do vírus. Qual é a porcentagem de pessoas realmente infectadas entre as pessoas que o teste classificou como infectadas?

Exercício 28. Um comerciante fixa o preço de um artigo em reais e centavos de real, de tal maneira que, quando ele acrescenta 4% de imposto, o resultado é um número

inteiro em reais. Qual o menor valor que esse artigo pode ter?

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1. O valor 800 reais com taxa de 8% a.m. gera por mês um valor fixo de rendimento, por se tratar de juros simples. A parcela mensal de ganho é de $8\% \cdot 800 = 64$ reais. Sendo 3 meses de investimento, $64 \cdot 3 = 192$ reais. Por fim, a retirada será de $800 + 192 = 992$ reais.

2. Por se tratar de juros simples pode-se aplicar a variação de ganho imediatamente, ou seja, o valor do juros é de $11900 - 9500 = 2400$ reais. Como foram 12 meses, tem-se 200 reais de ganho fixo por mês. O percentual mensal é $\frac{200}{9500} = \frac{2}{95} = 0,02105263... \cong 2,11\%$.

3. O preço era R\$ 350,00 mas houve uma entrada (pagamento) de R\$ 80,00, a dívida com a loja ficou em 270 reais. Com a taxa de juros mensal de $4\% = 0,04$, tem-se o valor do juros mensal de $0,04 \cdot 270 = 10,80$ reais. Como são 3 meses, o valor pago de acréscimo será de $3 \cdot 10,80 = 32,40$ reais. Logo o cheque será de $270 + 32,40 = 302,40$ reais.

4. Como o regime é de juros simples e houve um ganho de $1080 - 800 = 280$, basta calcular o percentual total de ganho que foi $\frac{280}{800} = 0,35 = 35\%$. Para finalizar, basta fazer a divisão pelo percentual mensal, $\frac{0,35}{0,025} = 14$ meses.

5. Por se tratar de juros simples, a taxa de juros mensal será $\frac{0,24}{12} = 0,02$. Como foram 7 meses, houve uma taxa de $7 \cdot 0,02 = 0,14$ no período. O rendimento será de $0,14 \cdot 60000 = 8400$ reais.

Comentário para professores:. Sugerimos apenas após os problemas iniciais, a introdução das fórmulas:

$$M = C + J \text{ e } J = Cin,$$

onde M é o montante, C o capital, i a taxa de juros e n o prazo do investimento.

6. Substituindo em $J = Cin$ os valores do enunciado, temos:

$$\begin{aligned} J &= Cin \\ 150 &= 500 \cdot i \cdot 10 \\ i &= \frac{150}{5000} \\ i &= \frac{3}{100} \\ i &= 3\% \end{aligned}$$

7. Do enunciado conclui-se que $M = 2880$, $C = 2000$, $n = 2$. Assim

$$\begin{aligned} J &= Cin \\ 880 &= 2000 \cdot i \cdot 2 \\ i &= \frac{880}{4000} \\ i &= \frac{22}{100} \\ i &= 22\% \end{aligned}$$

8. Do enunciado conclui-se que $J = 3x$, $C = x$, $n = 5$. Assim

$$\begin{aligned} J &= Cin \\ 3x &= x \cdot i \cdot 5 \\ 3 &= i \cdot 5 \\ i &= \frac{3}{5} \\ i &= 60\% \end{aligned}$$

9. Como se trata de juros compostos, o fator de variação do período foi de $(1+i)^2$. Com $C = 80000$, $M = 115200$, $n = 2$, temos

$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^n \\ 115200 &= 80000(1+i)^2 \\ (1+i)^2 &= \frac{115200}{80000} \\ (1+i)^2 &= \frac{144}{100} \\ 1+i &= \sqrt{\frac{144}{100}} \\ 1+i &= \frac{12}{10} \\ 1+i &= 1,2 \\ i &= 0,2 \end{aligned}$$

Resposta: 20%.

10. Do enunciado tem-se: $C = x$, $M = 4x$ e $n = 2$ meses. Assim

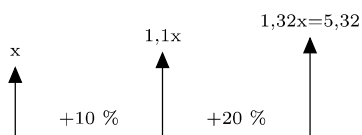
$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^n \\ 4x &= x \cdot (1+i)^2 \\ \frac{4x}{x} &= (1+i)^2 \\ (1+i)^2 &= 4 \\ 1+i &= 2 \\ i &= 1 \end{aligned}$$

Resposta: 100%.

11. Do enunciado tem-se: $J = 2370$, $C = 3000$, $M = 5370$, $i = ?\%$ a.m. e $n = 10$ meses.

$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^n \\ 5370 &= 3000 \cdot (1+i)^{10} \\ \frac{5370}{3000} &= (1+i)^{10} \\ (1+i)^{10} &= 1,79 \\ 1+i &= \sqrt[10]{1,79} \\ i &= \sqrt[10]{1,79} - 1 \end{aligned}$$

12. Como foram dois aumentos distintos devemos fazer a aplicação, passo a passo, dos fatores 1,1 e 1,2. O que resulta num aumento acumulado de $1,1 \cdot 1,2 = 1,32$. Portanto o valor inicial x se torna $1,32x$ depois dos dois aumentos. Por fim, $1,32x = 5,28$ e $x = \frac{5,28}{1,32} = 4$ reais. Gráficamente a situação pode ser representada por:

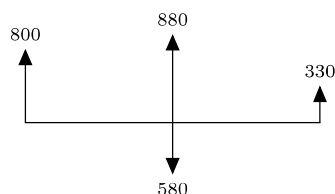


2 Exercícios de Fixação

13. Do enunciado tem-se: $M = ?$, $C = 100$, $i = 100\%$ a.a. e $n = 3$ meses.

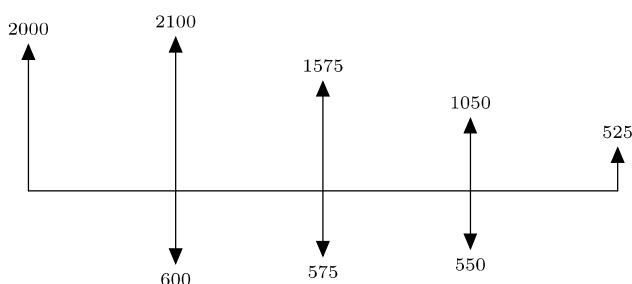
$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^n \\ M &= 100 \cdot (1+1)^3 \\ M &= 100 \cdot 2^3 \\ M &= 100 \cdot 8 \\ M &= 800 \text{ reais.} \end{aligned}$$

14. João tomou 800 reais e a taxa de juros é de $10\% = 0,1$ ao mês, sendo assim, o fator de variação do saldo devedor é 1,1 a cada mês. O recebimento de 800 reais, depois de um mês sob juros, se transformou em uma dívida de $1,1 \cdot 800 = 880$. Nesse momento houve uma amortização da dívida de 580 reais, ficando com saldo devedor de 300 reais. Por fim, mais um mês de juros e o novo valor a pagar é de $1,1 \cdot 300 = 330$. O que encerra a dívida. A ilustração abaixo expõe o fluxo do saldo de devedor e dos pagamentos efetuados com o passar do tempo.



Resposta: O último pagamento foi de 330 reais.

15. Maria tomou 2000 reais e a taxa de juros é de $5\% = 0,05$ ao mês, sendo assim, o fator de variação mensal do saldo devedor é 1,05. Após o primeiro mês, os 2000 reais viraram uma dívida de $1,05 \cdot 2000 = 2100$. Nesse momento houve a amortização de 600 reais, ficando com saldo devedor de 1500 reais. Daí, após o segundo mês, a dívida se elevou para $1,05 \cdot 1500 = 1575$ e houve outra amortização de 575 reais transformando o saldo devedor em 1000 reais. Na sequência, após mais um mês, a dívida passou a ser de $1,05 \cdot 1000 = 1050$ reais. Ocorreu mais uma amortização 550 reais e saldo devedor passou a ser 500 reais. Por fim, dívida final se transformou em $1,05 \cdot 500 = 525$ reais. A figura abaixo sugere o fluxo de juros e amortizações até o fim da dívida.



Resposta: O último pagamento foi de 525 reais.

16. (Extraído do vestibular da UNEB)

Sendo C o valor que as duas pessoas tomaram de empréstimo, o período $n = 2$ meses, a primeira teve taxa de juros $i_1 = 0,02$ e a segunda, $i_2 = \frac{x}{100}$. Os montantes M_1 e M_2 são iguais. Assim

$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 \\ C + C \cdot \frac{x}{100} \cdot 2 &= C(1,02)^2 \\ C(1 + \frac{x}{100} \cdot 2) &= C(1,02)^2 \\ 1 + \frac{x}{50} &= 1,0404 \\ \frac{x}{50} &= 0,0404 \\ x &= 50 \cdot 0,0404 \\ x &= 2,02 \end{aligned}$$

17. Sendo $2C$ o valor do capital aplicado, metade a $i_1 = 0,30$ a.s. por $n_1 = 2$ semestres e a outra metade a $i_2 = 0,27$ a.q. por $n_2 = 3$ quadrimestres. A soma dos

montantes M_1 e M_2 fica 4200. Assim

$$\begin{aligned}M_1 &= C(1,3)^2 \\M_1 &= 1,69C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_2 &= C + C \cdot 0,27 \cdot 3 \\M_2 &= C + 0,81C \\M_2 &= 1,81C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_1 + M_2 &= 4200 \\1,69C + 1,81C &= 4200 \\3,5C &= 4200 \\C &= \frac{4200}{3,5} \\C &= 1200 \\2C &= 2400 \text{ reais.}\end{aligned}$$

18. Do enunciado tem-se: $M = y$, $C = x$, $i = 1\%$ a.a. e $n = 10$ anos.

$$\begin{aligned}M &= C(1+i)^n \\y &= x \cdot (1,01)^{10} \\\frac{y}{x} &= (1,01)^{10}\end{aligned}$$

19. (Extraído do vestibular da UNEB)

Iniciando pelos juros simples, um capital “ c ”, com taxa $i_1 = 0,1$, por $n_1 = 2$ meses, gera um resultado de $1,2c$. Agora nos juros compostos, um novo capital “ $1,2c$ ” será aplicado pela taxa $i_2 = 0,2$, pelo prazo $n_2 = 2$ meses. Logo, $M = 1,2c \cdot (1,2)^2$. Como $M = 1728$, tem-se que: $1728 = (1,2)^3c$ e consequentemente $c = \frac{1728}{1,2^3} = 1000$ reais.

20. (Extraído do vestibular da UFPA)

Tem-se: $M = 520$, $C = x$, $i = 0,05$ a.m. e $n = 6$ meses. Assim

$$\begin{aligned}M &= C + J \\M &= C + Cin \\520 &= C(1 + 0,05 \cdot 6) \\520 &= C(1 + 0,3) \\520 &= C(1,3) \\C &= \frac{520}{1,3} \\C &= 400.\end{aligned}$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

21. (Extraído da Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro)

Sendo c o comprimento e l a largura, a área inicial é $S = cl$. Como c aumentou em $0,20c$ e l aumentou em $0,5l$, seus novos valores são $1,2c$ e $1,5l$, respectivamente. Então a área S' é:

$$\begin{aligned}S' &= 1,2c \cdot 1,5l \\&= 1,2c \cdot 1,5l \\&= 1,8S.\end{aligned}$$

Portanto, houve aumento de 80% na área.

22. (Adaptado do vestibular da FGV)

Do enunciado tem-se: $C = 45000$, $i = -4\%$ a.a. e $n = 10$ anos.

$$\begin{aligned}M &= C(1+i)^n \\M &= 45000 \cdot (0,96)^{10} \\M &= 45000 \cdot (0,96)^{10} \\M &\cong 29917,47 \text{ reais.}\end{aligned}$$

23. (Adaptado do vestibular da UFBA)

Do enunciado tem-se: $M = 9800$, $i = 40\%$ a.a. e $n = 2$ anos, no sistema de juros compostos, então:

$$\begin{aligned}9800 &= C(1,4)^2 \\C &= \frac{9800}{1,96} \\C &= 5000 \text{ reais.}\end{aligned}$$

Passando para juros simples: $M = 9800$, $C = 5000$, $i = x\%$ a.a. e $n = 2$ anos, tem-se:

$$\begin{aligned}9800 &= 5000 + 5000 \cdot \frac{x}{100} \cdot 2 \\100x &= 4800 \\x &= 48.\end{aligned}$$

24. (Extraído do vestibular da UNEB)

Depois de 10 dias com acréscimos diários de 5%, tem-se 9 acréscimos com fatores de variação de $(1,05)$, sendo assim: $80(1,05)^9 \cong 80 \cdot 1,551 = 124,08$ km.

25. (Adaptado do vestibular da FUVEST)

Do enunciado tem-se: $M = ?$, $C = 10^6$, $i = 9\%$ a.a. e $n = 1999 - 1839 = 160$ anos.

$$\begin{aligned}M &= C(1+i)^n \\M &= 10^6 \cdot (1,09)^{160} \\M &= 10^6 \cdot ((1,09)^8)^{20} \\M &= 10^6 \cdot 2^{20}\end{aligned}$$

Resposta: A dívida estava em $2^{20} \cdot 10^6$ dólares.

26. (Extraído do exame de acesso do PROFMAT)

Com as reduções de 50%, 40% e 10%, tem-se respectivamente os fatores de variação de

$$(1 - 0,5) = 0,5, (1 - 0,4) = 0,6 \text{ e } (1 - 0,1) = 0,9.$$

O fator acumulado foi

$$0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,9 = 0,27.$$

Logo, reduziu-se $1 - 0,27 = 0,73$.

27. (Extraído do PAPMEM 2014.2)

Suponha que a população seja de 1000 pessoas. Das quais 100 estão infectadas. Dentre essas, o teste acerta 90% das vezes, portanto o teste identificou 90 pessoas com o vírus (e de fato elas o têm). No grupo das que não estão doentes, 20% são falsos positivos, portanto $0,20 \cdot 900 = 180$ estão sadias mas com teste positivo. Daí, as pessoas que o teste identificou com infectadas foram $90 + 180 = 270$ e as que estão com o vírus (pelo teste) foram 90. Por fim, o percentual fica em $\frac{90}{270} = \frac{1}{3} \cong 33,33\%$.

Comentário para professores:. O valor arbitrário referência de 1000 não a generalidade da solução pois os resultados percentuais não mudam caso todos os valores envolvidos sejam multiplicados por uma mesma constante. A solução do caso geral é totalmente análoga trocando-se o número 1000 por p arbitrário. É recomendável induzir os alunos a resolverem inicialmente o problema com valores particulares antes de abordar o caso geral.

28. (Extraído da Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro)

Sejam x e y ($0 \leq y \leq 99$) tais o preço do artigo é x reais mais y centavos sem a cobrança do imposto. Com o imposto, ele passa a ser $P = 1,04 \left(x + \frac{y}{100} \right)$, com $P \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} P &= 1,04 \left(x + \frac{y}{100} \right) \\ &= \frac{104x}{100} + \frac{104y}{10000} \\ &= \frac{26x}{25} + \frac{13y}{1250} \\ &= \frac{1300x + 13y}{1250} \\ &= \frac{13(100x + y)}{1250} \end{aligned}$$

Como P é inteiro positivo, e 13 é relativamente primo com 1250, então 1250 deve dividir $100x + y$. O menor múltiplo positivo de 1250 é o próprio 1250. Para que $100x + y = 1250$ basta que $x = 12$ e $y = 50$. Veja que y satisfaz a condição: $0 \leq y \leq 99$. Assim, o menor valor procurado é R\$12,50.

PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM

Módulo de Juros e Porcentagem

Juros Simples e Compostos

Sétimo Ano



Juros Simples e Compostos

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Um investidor quer aplicar a quantia de R\$ 800,00 por 3 meses, a uma taxa de 8% ao mês (a.m.) em juros simples, para retirar no final deste período. Quanto ele irá retirar?

Exercício 2. Qual é a taxa mensal de juros simples que faz um capital de R\$ 9.500,00 produzir um montante de R\$ 11.900,00 ao fim de 1 ano de aplicação?

Exercício 3. O preço à vista de um eletrodoméstico é R\$ 350,00. Dando-se uma entrada de R\$ 80,00, o restante será pago com um cheque com vencimento para 3 meses depois da compra incluindo um acréscimo de juros simples de 4% ao mês. Qual será o valor do cheque?

Exercício 4. Esmeraldino aplicou R\$ 800,00, a juros simples, a uma taxa de 2,5% ao mês e, ao final de um certo tempo, recebeu R\$ 1.080,00. Quanto tempo ela deixou o dinheiro aplicado a essa taxa?

Exercício 5. Determine quanto renderá, em juros simples, um capital de R\$ 60.000,00 aplicado à taxa de 24% ao ano, durante sete meses.

Comentário para professores:. Sugerimos apenas após os problemas iniciais, a introdução das fórmulas:

$$M = C + J \text{ e } J = Cin,$$

onde M é o montante, C o capital, i a taxa de juros e n o prazo do investimento.

Exercício 6. A que taxa mensal de juros simples um capital de R\$ 500,00, aplicado durante 10 meses, produz R\$ 150,00 de juros?

Exercício 7. Mário devia, em seu cartão de crédito, R\$ 2.000,00. Como não conseguiu pagar, em dois meses essa dívida aumentou para R\$ 2.880,00. Nesse caso, qual foi a taxa de juros simples cobrada mensalmente pelo cartão de crédito?

Exercício 8. Um certo capital foi aplicado por 5 meses. Ao fim desse prazo, só de juros simples, o aplicador recebeu o triplo do dinheiro. Qual é a taxa mensal dessa aplicação?

Exercício 9. Por um empréstimo de R\$ 80000,00, à taxa de $i\%$ ao mês, paga-se, de uma única vez, após 2 meses, o montante de R\$ 115200,00. Por terem sido aplicados juros compostos, qual a taxa mensal aplicada?

Exercício 10. Um capital quadruplica em 2 meses ao se utilizar de capitalização composta. Qual a taxa mensal aplicada?

Exercício 11. Uma aplicação de R\$ 3.000,00 rendeu R\$ 2.370,00 em 10 meses. Qual a taxa mensal composta de juros dessa operação?

Exercício 12. O preço do cento laranja teve dois aumentos consecutivos: 10% e 20%. Se hoje o cento da laranja custa R\$5,28, determine o seu preço antes dos aumentos.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 13. O preço de certa mercadoria sofre anualmente um acréscimo de 100%. Supondo que o preço atual seja R\$ 100,00, qual o preço daqui a 3 anos?

Exercício 14. João fez um empréstimo de R\$ 800,00 em uma financeira, que cobra uma taxa de juros de 10% ao mês, comprometendo-se a saldar a dívida em dois meses. No fim do primeiro mês, Pedro pagou à financeira uma parcela de R\$ 580,00. Assim sendo, qual o valor que ficará para João pagar ao final do segundo mês?

Exercício 15. Maria pegou no banco um empréstimo de R\$ 2000,00, que cobra uma taxa de juros de 5% ao mês, comprometendo-se a saldar a dívida em quatro meses. No fim do primeiro mês, Maria pagou uma parcela de R\$ 600,00. No fim do segundo mês, ela pagou R\$ 575,00. No fim do terceiro mês, pagou R\$ 550,00. Assim sendo, qual o valor que ficará para Maria pagar ao final do quarto mês?

Exercício 16. Duas pessoas fizeram um empréstimo de uma mesma quantia por dois meses, nas seguintes condições:

- i) A primeira, a juros compostos de 2% a.m.
- ii) A segunda, a juros simples de $x\%$ a.m.

Sabendo-se que, ao quitar a dívida, as duas pagaram o mesmo valor, qual o valor de x ?

Exercício 17. Uma pessoa aplicou metade do seu capital à taxa de 30% ao semestre no regime de juros compostos e a outra metade à taxa de 27% ao quadrimestre no sistema de juros simples e obteve ao final de um ano um montante de R\$ 4.200,00. Qual o capital inicial desta pessoa?

Exercício 18. Uma quantia de x reais foi aplicada a juros compostos de 1% ao mês. Ao final de 10 meses, foi feito o resgate total da aplicação, obtendo-se y reais. Qual a razão $\frac{y}{x}$?

Exercício 19. Um investidor fez uma aplicação a juros simples de 10% mensal. Depois de dois meses, retirou capital e juros e os reaplicou a juros compostos de 20% mensal, por mais dois meses e, no final do prazo, recebeu R\$ 1728,00. Qual o valor do capital inicial?

Exercício 20. Daqui a seis meses você deve saldar uma dívida de R\$ 520,00. Que importância deve aplicar hoje ao juro simples de 5% ao mês para que, no prazo devido, você esteja com a quantia devida?

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 21. Se o comprimento de um retângulo é aumentado de 20% e sua largura é aumentada de 50%, de quanto aumenta sua área?

Exercício 22. Se um automóvel custa hoje R\$ 45000,00 e a cada ano sofre uma desvalorização de 4%, qual o seu valor, em reais, daqui a dez anos?

Exercício 23. Um capital aplicado no prazo de dois anos, a uma taxa de juros compostos de 40% ao ano, resulta no montante de R\$ 9800,00. Sendo $x\%$ a taxa anual de juros simples que, aplicada ao mesmo capital durante o mesmo prazo, resultará no mesmo montante, determine x .

Exercício 24. Um carro foi testado durante 10 dias para verificar o bom desempenho e poder ser lançado no mercado com bastante sucesso. No primeiro dia do teste, ele percorreu 80km e, nos dias subsequentes, houve um aumento de 5% da quilometragem rodada em relação à quilometragem do dia anterior. Nessas condições, qual foi a quilometragem do último dia de testes?

Exercício 25. Um país contratou em 1839 um empréstimo de 1 milhão de dólares, para pagar em cem anos à taxa de juros de 9% ao ano. Por problemas de balança comercial, nada foi pago até hoje, e dívida foi sendo “rolada”, com capitalização anual de juros. Qual o valor valores abaixo está mais próximo do valor da dívida em 1999?
Para os cálculos adote $(1,09)^8 \cong 2$.

Exercício 26. Com uma nova invenção, o custo da produção de um produto foi reduzido em 50%. Após uma isenção de impostos, o custo da produção desse mesmo produto foi reduzido em 40% e, em seguida, com a diminuição das tarifas de energia, o custo ainda foi reduzido em 10%. Qual foi a redução percentual do custo da produção desse produto?

Exercício 27. Sabe-se que 10% de uma certa população está infectada por um vírus. Um teste para identificar a presença do vírus acerta 90% das vezes quando aplicado em uma pessoa infectada, e apresenta 80% de acertos quando aplicado em uma pessoa que não é portadora do vírus. Qual é a porcentagem de pessoas realmente infectadas entre as pessoas que o teste classificou como infectadas?

Exercício 28. Um comerciante fixa o preço de um artigo em reais e centavos de real, de tal maneira que, quando ele acrescenta 4% de imposto, o resultado é um número

inteiro em reais. Qual o menor valor que esse artigo pode ter?

Respostas e Soluções

1 Exercícios Introdutórios

1. O valor 800 reais com taxa de 8% a.m. gera por mês um valor fixo de rendimento, por se tratar de juros simples. A parcela mensal de ganho é de $8\% \cdot 800 = 64$ reais. Sendo 3 meses de investimento, $64 \cdot 3 = 192$ reais. Por fim, a retirada será de $800 + 192 = 992$ reais.

2. Por se tratar de juros simples pode-se aplicar a variação de ganho imediatamente, ou seja, o valor do juros é de $11900 - 9500 = 2400$ reais. Como foram 12 meses, tem-se 200 reais de ganho fixo por mês. O percentual mensal é $\frac{200}{9500} = \frac{2}{95} = 0,02105263... \cong 2,11\%$.

3. O preço era R\$ 350,00 mas houve uma entrada (pagamento) de R\$ 80,00, a dívida com a loja ficou em 270 reais. Com a taxa de juros mensal de $4\% = 0,04$, tem-se o valor do juros mensal de $0,04 \cdot 270 = 10,80$ reais. Como são 3 meses, o valor pago de acréscimo será de $3 \cdot 10,80 = 32,40$ reais. Logo o cheque será de $270 + 32,40 = 302,40$ reais.

4. Como o regime é de juros simples e houve um ganho de $1080 - 800 = 280$, basta calcular o percentual total de ganho que foi $\frac{280}{800} = 0,35 = 35\%$. Para finalizar, basta fazer a divisão pelo percentual mensal, $\frac{0,35}{0,025} = 14$ meses.

5. Por se tratar de juros simples, a taxa de juros mensal será $\frac{0,24}{12} = 0,02$. Como foram 7 meses, houve uma taxa de $7 \cdot 0,02 = 0,14$ no período. O rendimento será de $0,14 \cdot 60000 = 8400$ reais.

Comentário para professores:. Sugerimos apenas após os problemas iniciais, a introdução das fórmulas:

$$M = C + J \text{ e } J = Cin,$$

onde M é o montante, C o capital, i a taxa de juros e n o prazo do investimento.

6. Substituindo em $J = Cin$ os valores do enunciado, temos:

$$\begin{aligned} J &= Cin \\ 150 &= 500 \cdot i \cdot 10 \\ i &= \frac{150}{5000} \\ i &= \frac{3}{100} \\ i &= 3\% \end{aligned}$$

7. Do enunciado conclui-se que $M = 2880$, $C = 2000$, $n = 2$. Assim

$$\begin{aligned} J &= Cin \\ 880 &= 2000 \cdot i \cdot 2 \\ i &= \frac{880}{4000} \\ i &= \frac{22}{100} \\ i &= 22\% \end{aligned}$$

8. Do enunciado conclui-se que $J = 3x$, $C = x$, $n = 5$. Assim

$$\begin{aligned} J &= Cin \\ 3x &= x \cdot i \cdot 5 \\ 3 &= i \cdot 5 \\ i &= \frac{3}{5} \\ i &= 60\% \end{aligned}$$

9. Como se trata de juros compostos, o fator de variação do período foi de $(1+i)^2$. Com $C = 80000$, $M = 115200$, $n = 2$, temos

$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^n \\ 115200 &= 80000(1+i)^2 \\ (1+i)^2 &= \frac{115200}{80000} \\ (1+i)^2 &= \frac{144}{100} \\ 1+i &= \sqrt{\frac{144}{100}} \\ 1+i &= \frac{12}{10} \\ 1+i &= 1,2 \\ i &= 0,2 \end{aligned}$$

Resposta: 20%.

10. Do enunciado tem-se: $C = x$, $M = 4x$ e $n = 2$ meses. Assim

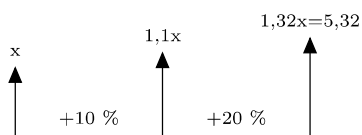
$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^n \\ 4x &= x \cdot (1+i)^2 \\ \frac{4x}{x} &= (1+i)^2 \\ (1+i)^2 &= 4 \\ 1+i &= 2 \\ i &= 1 \end{aligned}$$

Resposta: 100%.

11. Do enunciado tem-se: $J = 2370$, $C = 3000$, $M = 5370$, $i = ?\% \text{a.m.}$ e $n = 10$ meses.

$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^n \\ 5370 &= 3000 \cdot (1+i)^{10} \\ \frac{5370}{3000} &= (1+i)^{10} \\ (1+i)^{10} &= 1,79 \\ 1+i &= \sqrt[10]{1,79} \\ i &= \sqrt[10]{1,79} - 1 \end{aligned}$$

12. Como foram dois aumentos distintos devemos fazer a aplicação, passo a passo, dos fatores 1,1 e 1,2. O que resulta num aumento acumulado de $1,1 \cdot 1,2 = 1,32$. Portanto o valor inicial x se torna $1,32x$ depois dos dois aumentos. Por fim, $1,32x = 5,28$ e $x = \frac{5,28}{1,32} = 4$ reais. Gráficamente a situação pode ser representada por:

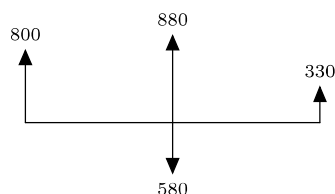


2 Exercícios de Fixação

13. Do enunciado tem-se: $M = ?$, $C = 100$, $i = 100\% \text{a.a.}$ e $n = 3$ meses.

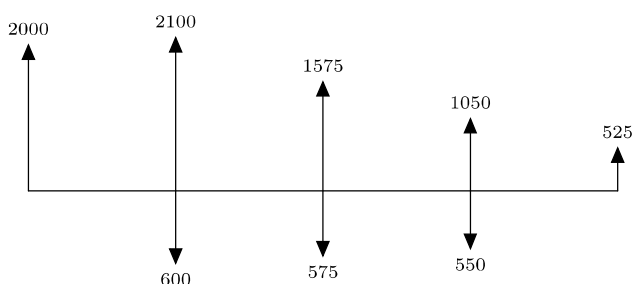
$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^n \\ M &= 100 \cdot (1+1)^3 \\ M &= 100 \cdot (2)^3 \\ M &= 100 \cdot 8 \\ M &= 800 \text{ reais.} \end{aligned}$$

14. João tomou 800 reais e a taxa de juros é de $10\% = 0,1$ ao mês, sendo assim, o fator de variação do saldo devedor é 1,1 a cada mês. O recebimento de 800 reais, depois de um mês sob juros, se transformou em uma dívida de $1,1 \cdot 800 = 880$. Nesse momento houve uma amortização da dívida de 580 reais, ficando com saldo devedor de 300 reais. Por fim, mais um mês de juros e o novo valor a pagar é de $1,1 \cdot 300 = 330$. O que encerra a dívida. A ilustração abaixo expõe o fluxo do saldo de devedor e dos pagamentos efetuados com o passar do tempo.



Resposta: O último pagamento foi de 330 reais.

15. Maria tomou 2000 reais e a taxa de juros é de $5\% = 0,05$ ao mês, sendo assim, o fator de variação mensal do saldo devedor é 1,05. Após o primeiro mês, os 2000 reais viraram uma dívida de $1,05 \cdot 2000 = 2100$. Nesse momento houve a amortização de 600 reais, ficando com saldo devedor de 1500 reais. Daí, após o segundo mês, a dívida se elevou para $1,05 \cdot 1500 = 1575$ e houve outra amortização de 575 reais transformando o saldo devedor em 1000 reais. Na sequência, após mais um mês, a dívida passou a ser de $1,05 \cdot 1000 = 1050$ reais. Ocorreu mais uma amortização 550 reais e saldo devedor passou a ser 500 reais. Por fim, dívida final se transformou em $1,05 \cdot 500 = 525$ reais. A figura abaixo sugere o fluxo de juros e amortizações até o fim da dívida.



Resposta: O último pagamento foi de 525 reais.

16. (Extraído do vestibular da UNEB)

Sendo C o valor que as duas pessoas tomaram de empréstimo, o período $n = 2$ meses, a primeira teve taxa de juros $i_1 = 0,02$ e a segunda, $i_2 = \frac{x}{100}$. Os montantes M_1 e M_2 são iguais. Assim

$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 \\ C + C \cdot \frac{x}{100} \cdot 2 &= C(1,02)^2 \\ C(1 + \frac{x}{100} \cdot 2) &= C(1,02)^2 \\ 1 + \frac{x}{50} &= 1,0404 \\ \frac{x}{50} &= 0,0404 \\ x &= 50 \cdot 0,0404 \\ x &= 2,02 \end{aligned}$$

17. Sendo $2C$ o valor do capital aplicado, metade a $i_1 = 0,30$ a.s. por $n_1 = 2$ semestres e a outra metade a $i_2 = 0,27$ a.q. por $n_2 = 3$ quadrimestres. A soma dos

montantes M_1 e M_2 fica 4200. Assim

$$\begin{aligned}M_1 &= C(1,3)^2 \\M_1 &= 1,69C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_2 &= C + C \cdot 0,27 \cdot 3 \\M_2 &= C + 0,81C \\M_2 &= 1,81C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_1 + M_2 &= 4200 \\1,69C + 1,81C &= 4200 \\3,5C &= 4200 \\C &= \frac{4200}{3,5} \\C &= 1200 \\2C &= 2400 \text{ reais.}\end{aligned}$$

18. Do enunciado tem-se: $M = y$, $C = x$, $i = 1\%$ a.a. e $n = 10$ anos.

$$\begin{aligned}M &= C(1+i)^n \\y &= x \cdot (1,01)^{10} \\\frac{y}{x} &= (1,01)^{10}\end{aligned}$$

19. (Extraído do vestibular da UNEB)

Iniciando pelos juros simples, um capital “ c ”, com taxa $i_1 = 0,1$, por $n_1 = 2$ meses, gera um resultado de $1,2c$. Agora nos juros compostos, um novo capital “ $1,2c$ ” será aplicado pela taxa $i_2 = 0,2$, pelo prazo $n_2 = 2$ meses. Logo, $M = 1,2c \cdot (1,2)^2$. Como $M = 1728$, tem-se que: $1728 = (1,2)^3c$ e consequentemente $c = \frac{1728}{1,2^3} = 1000$ reais.

20. (Extraído do vestibular da UFPA)

Tem-se: $M = 520$, $C = x$, $i = 0,05$ a.m. e $n = 6$ meses. Assim

$$\begin{aligned}M &= C + J \\M &= C + Cin \\520 &= C(1 + 0,05 \cdot 6) \\520 &= C(1 + 0,3) \\520 &= C(1,3) \\C &= \frac{520}{1,3} \\C &= 400.\end{aligned}$$

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

21. (Extraído da Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro)

Sendo c o comprimento e l a largura, a área inicial é $S = cl$. Como c aumentou em $0,20c$ e l aumentou em $0,5l$, seus novos valores são $1,2c$ e $1,5l$, respectivamente. Então a área S' é:

$$\begin{aligned}S' &= 1,2c \cdot 1,5l \\&= 1,2c \cdot 1,5l \\&= 1,8S.\end{aligned}$$

Portanto, houve aumento de 80% na área.

22. (Adaptado do vestibular da FGV)

Do enunciado tem-se: $C = 45000$, $i = -4\%$ a.a. e $n = 10$ anos.

$$\begin{aligned}M &= C(1+i)^n \\M &= 45000 \cdot (0,96)^{10} \\M &= 45000 \cdot (0,96)^{10} \\M &\cong 29917,47 \text{ reais.}\end{aligned}$$

23. (Adaptado do vestibular da UFBA)

Do enunciado tem-se: $M = 9800$, $i = 40\%$ a.a. e $n = 2$ anos, no sistema de juros compostos, então:

$$\begin{aligned}9800 &= C(1,4)^2 \\C &= \frac{9800}{1,96} \\C &= 5000 \text{ reais.}\end{aligned}$$

Passando para juros simples: $M = 9800$, $C = 5000$, $i = x\%$ a.a. e $n = 2$ anos, tem-se:

$$\begin{aligned}9800 &= 5000 + 5000 \cdot \frac{x}{100} \cdot 2 \\100x &= 4800 \\x &= 48.\end{aligned}$$

24. (Extraído do vestibular da UNEB)

Depois de 10 dias com acréscimos diários de 5%, tem-se 9 acréscimos com fatores de variação de $(1,05)$, sendo assim: $80(1,05)^9 \cong 80 \cdot 1,551 = 124,08$ km.

25. (Adaptado do vestibular da FUVEST)

Do enunciado tem-se: $M = ?$, $C = 10^6$, $i = 9\%$ a.a. e $n = 1999 - 1839 = 160$ anos.

$$\begin{aligned}M &= C(1+i)^n \\M &= 10^6 \cdot (1,09)^{160} \\M &= 10^6 \cdot ((1,09)^8)^{20} \\M &= 10^6 \cdot 2^{20}\end{aligned}$$

Resposta: A dívida estava em $2^{20} \cdot 10^6$ dólares.

26. (Extraído do exame de acesso do PROFMAT)

Com as reduções de 50%, 40% e 10%, tem-se respectivamente os fatores de variação de

$$(1 - 0,5) = 0,5, (1 - 0,4) = 0,6 \text{ e } (1 - 0,1) = 0,9.$$

O fator acumulado foi

$$0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,9 = 0,27.$$

Logo, reduziu-se $1 - 0,27 = 0,73$.

27. (Extraído do PAPMEM 2014.2)

Suponha que a população seja de 1000 pessoas. Das quais 100 estão infectadas. Dentre essas, o teste acerta 90% das vezes, portanto o teste identificou 90 pessoas com o vírus (e de fato elas o têm). No grupo das que não estão doentes, 20% são falsos positivos, portanto $0,20 \cdot 900 = 180$ estão sadias mas com teste positivo. Daí, as pessoas que o teste identificou com infectadas foram $90 + 180 = 270$ e as que estão com o vírus (pelo teste) foram 90. Por fim, o percentual fica em $\frac{90}{270} = \frac{1}{3} \cong 33,33\%$.

Comentário para professores:. O valor arbitrário referência de 1000 não a generalidade da solução pois os resultados percentuais não mudam caso todos os valores envolvidos sejam multiplicados por uma mesma constante. A solução do caso geral é totalmente análoga trocando-se o número 1000 por p arbitrário. É recomendável induzir os alunos a resolverem inicialmente o problema com valores particulares antes de abordar o caso geral.

28. (Extraído da Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro)

Sejam x e y ($0 \leq y \leq 99$) tais o preço do artigo é x reais mais y centavos sem a cobrança do imposto. Com o imposto, ele passa a ser $P = 1,04 \left(x + \frac{y}{100} \right)$, com $P \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} P &= 1,04 \left(x + \frac{y}{100} \right) \\ &= \frac{104x}{100} + \frac{104y}{10000} \\ &= \frac{26x}{25} + \frac{13y}{1250} \\ &= \frac{1300x + 13y}{1250} \\ &= \frac{13(100x + y)}{1250} \end{aligned}$$

Como P é inteiro positivo, e 13 é relativamente primo com 1250, então 1250 deve dividir $100x + y$. O menor múltiplo positivo de 1250 é o próprio 1250. Para que $100x + y = 1250$ basta que $x = 12$ e $y = 50$. Veja que y satisfaz a condição: $0 \leq y \leq 99$. Assim, o menor valor procurado é R\$12,50.

PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDES.COM

Empréstimos: sistema Francês e sistema Americano



Vocês sabiam que:

O nome Sistema Francês (SF) ou Tabela Price (lê-se “praice”) por ter sido devido à França ser a primeira a utilizar o sistema. O nome “Tabela Price” não está relacionado à palavra preço (price, em inglês). Trata-se de uma homenagem ao matemático inglês Richard Price (1723-1791) que desenvolveu, a pedido de uma seguradora inglesa, tábuas de mortalidade que serviram de base para o cálculo de seguros e aposentadorias.

A partir deste estudo, as tábuas foram adaptadas,

adotadas e universalizadas pelos franceses como forma de amortização de empréstimos. Por isso, chamamos sistema francês ou tabela Price o processo de amortização de dívidas com prestações iguais. Interessante, não é mesmo?

Nesta aula, também investigaremos a respeito do Sistema Americano (SA), no qual o devedor se compromete a pagar o empréstimo em uma única parcela e, em geral, os juros são pagos durante a carência.

Boa aula!

Boa aula!

Objetivos de aprendizagem

Ao término desta aula, vocês serão capazes de:

- calcular o valor de prestações fixas de um financiamento;
- determinar taxas e tempos de aplicações;
- montar uma planilha de financiamento;
- determinar saldo devedor e juros pagos de um financiamento.

Seções de estudo

1 – Sistema Price de amortização

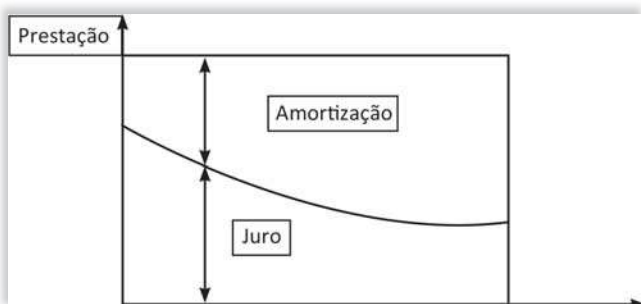
2 – Sistema americano (SA): definições e exemplos

1 - Sistema Price de amortização

É uma modalidade bastante utilizada em operações de financiamento imobiliário e de créditos direto ao consumidor. Neste sistema o mutuário obriga-se a devolver o principal mais os juros em prestações iguais.

Para a construção da planilha temos que resolver dois problemas: como calcular o valor da prestação e como separar a amortização dos juros. A taxa de juros contratada é nominal. No Brasil em geral a taxa é dada em anos com capitalização mensal.

Por exemplo, para uma taxa de 12% ao ano, teremos 1% ao mês, o que nos dá uma taxa efetiva de 12,61% ao ano. (Veja taxas equivalentes – Aula 01).



Para o cálculo dos diversos fatores que compõem o sistema price, consideraremos a existência de um mercado de capitais perfeito, em que somente há uma taxa “i” para os financiamentos e para os

excedentes de poupança postos à disposição dos ofertantes de recursos. Desse modo, admitindo o fluxo de caixa a seguir para um valor financiado (PV) e as correspondentes “n” parcelas de pagamento “R”, teremos:

- Valor das prestações no período

$$R = \frac{PV}{a_{n-i}}$$

$$a_{n-i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

- Saldo devedor

$$\left[\frac{(1+i)^{n-k} - 1}{i(1+i)^{n-k}} \right]$$

- Juros

$$J_k = PV \cdot \left[\frac{(1+i)^k - 1}{(1+i)^k} \right]$$

- Amortização

$$A_k = PV - J_k$$

Exemplos:

Sistema Price com prazo de utilização unitário e sem prazo de carência

Um banco empresta R\$100.000,00, entregues no ato, sem prazo de carência. Sabendo que o banco utiliza o sistema price, que a taxa contratada foi de 10% a.a. e que o banco quer a devolução em 5 prestações, construir a planilha.

Resolução: Se o principal vai ser devolvido em 5 prestações iguais e postecipadas, temos exatamente uma anuidade que se conforma ao nosso Modelo básico.

Resolução:

Temos:

$$n = 5 \text{ anos}$$

$$i = 10\% \text{ a.a.}$$

$$PV = 100.000$$

$$R = ?$$

Calculamos agora o Valor de cada prestação pela fórmula:

$$PV = R \cdot a_{n|i}$$

$$\text{Então, temos: } R = \frac{PV}{a_{n|i}}$$

Vamos agora calcular o fator:

$$a_{5 \rightarrow 0,10} = \frac{(1,10)^5 - 1}{0,10(1,10)^5}$$

$$a_{5 \rightarrow 0,10} = \frac{1,61051 - 1}{0,10 \cdot 1,61051}$$

$$a_{5 \rightarrow 0,10} = \frac{0,61051}{0,161051}$$

Se tiverem dúvidas nestes cálculos, voltem e revejam a Aula 04.

$$a_{5 \rightarrow 0,10} = 3,790787$$

$$R = \frac{PV}{a_{n|i}}$$

$$R = \frac{100.000}{3,790787}$$

$$R = 26.379,75$$

Atenção! Vejam que a fórmula para o cálculo das prestações é a mesma utilizada na Aula 04.

Agora vamos construir a planilha

• **Passo 1** - No período zero, ou seja, no momento do financiamento, o único valor disponível é o saldo devedor da dívida (R\$100.000,00).

Ano (k)	Saldo Devedor (Sdk)	Amortização (Ak)	Juros (Jk=iSdk-1)	Prestação (Ak+Jk)
0	100.000,00	-	-	-

• **Passo 2** - A partir do período 1, lançamos o valor da prestação, o qual é R\$ 26.379,75 e o valor dos juros que é igual à taxa de juros de 10% a.a. vezes o saldo devedor.

Os juros são sempre calculados sobre o saldo devedor no período.

$$J_1 = 100.000 \cdot 10\%$$

$$J_1 = 10.000$$

Ano (k)	Saldo Devedor (Sdk)	Amortização (Ak)	Juros (Jk=iSdk-1)	Prestação (Ak+Jk)
0	100.000,00	-	-	-
1			10.000,00	26.379,75

• **Passo 3** - O valor a ser amortizado, isto é, o valor destinado para redução do saldo devedor é a diferença entre a prestação e os juros.

Teremos então cinco prestações iguais de R\$ 26.379,75. Os juros serão calculados do modo já visto no sistema de amortização constante, ou seja, aplicando a taxa de juros ao saldo devedor do período anterior.

A amortização será calculada pela diferença entre a prestação e o juro do período. Por sua vez, o saldo devedor do período será calculado como sendo a diferença entre o saldo devedor do período anterior e a amortização do período:

$$\text{Amortização } A = 26.379,75 - 10.000,00$$

$$A = 16.379,75$$

Ano (k)	Saldo Devedor (Sdk)	Amortização (Ak)	Juros (Jk=iSdk-1)	Prestação (Ak+Jk)
0	100.000,00	-	-	-
1		16.379,75	10.000,00	26.379,75

• **Passo 4** - O valor do saldo devedor, isto é, o valor do financiamento menos a parte que foi amortizada.

$$\text{Saldo devedor } Sd = 100.000 - 16.379,75$$

$$Sd = 83.620,25$$

Ano (k)	Saldo Devedor (Sdk)	Amortização (Ak)	Juros (Jk=iSdk-1)	Prestação (Ak+Jk)
0	100.000,00	-	-	-
1	83.620,25	16.379,75	10.000,00	26.379,75

• **Passo 5** - As mesmas operações, repetidas no período 2, gera a seguinte tabela:

Ano (k)	Saldo Devedor (Sdk)	Amortização (Ak)	Juros (Jk=iSdk-1)	Prestação (Ak+Jk)
0	100.000,00	-	-	-

1	83.620,25	16.379,75	10.000,00	26.379,75
2	65.602,53	18.017,72	8.362,03	26.379,75
3	45.783,03	19.819,50	6.560,25	26.379,75
4	23.981,58	21.801,45	4.578,30	26.379,75
5	-	23.981,58	2.398,16	26.379,74
Total	-	100.000,00	31.898,74	131.898,74

Vejam pela planilha que todas as prestações são iguais. Nessas prestações estão incluídos juros e amortização. Os juros são calculados sempre sobre o saldo devedor. O primeiro saldo devedor é de R\$ 100.000,00. Logo, em um ano a 10% de juros teremos $Juro = 100\ 000,00 \times 0,10 = 10\ 000,00$.

Temos então uma prestação de R\$ 26.379,75 descontando dessa prestação os juros. O que sobra é para amortização. Bom, então temos 16.379,75 para pagar parte do capital. O nosso saldo devedor agora é: $Sd = 100\ 000,00 - 16\ 379,75 = 83\ 620,25$.

De novo o juro é calculado sobre o saldo devedor. Agora, $juros = 83\ 620,25 \times 0,10 = 8\ 362,03$, novamente subtraímos os juros da prestação. O que sobra é para amortizar o saldo devedor e assim até a última prestação. Vocês devem ter percebido que nesse sistema a amortização aumenta e os juros diminuem a cada período.

Observação: As amortizações no sistema francês crescem à mesma taxa de juros da operação, ou seja, a amortização do período 2 (R\$18.017,72) é equivalente a amortização do período 1 (R\$16.379,75) aplicadas à taxa de 10% a.a:

$$16.379,75 \cdot 1,1 = 18.017,72$$

Observação: Fez-se um pequeno acerto no último período, assim, o procedimento é o seguinte:

- a soma das amortizações deve ser igual ao capital inicial R\$100.000,00. A diferença de alguns centavos pode ser alterada na última prestação para mais ou para menos.

Sistema Francês (SF), com prazo de utilização unitário e com prazo de carência

Quando se tem prazo de carência, podem ocorrer duas hipóteses:

- CASO A: durante a carência o mutuário paga os juros devidos.
- CASO B: durante a carência, os juros são

capitalizados e incorporados ao principal para serem amortizadas nas prestações.

É possível pensar também nos juros como sendo capitalizados e pagos de uma só vez, juntamente com a primeira prestação, mas esta modalidade raramente é utilizada nas aplicações práticas.

A fim de ilustrar os dois casos, admitamos o exemplo do item anterior com 3 anos de carência e as demais condições iguais.

CASO A:

O procedimento durante o período de carência é o mesmo já visto para o SAC, ou seja, os juros são calculados sobre o saldo devedor.

O cálculo das prestações e a separação entre amortizações e juros se processam como explicado no item anterior:

Agora vamos construir a planilha:

• **Passo 1** - No período zero, ou seja, no momento do financiamento, o único valor disponível é o saldo devedor da dívida (R\$100.000,00).

Ano (k)	Saldo Devedor (S _{dk})	Amortização (A _k)	Juros (J _k =iS _{dk} -1)	Prestação (A _k +J _k)
0	100.000,00	-	-	-

• **Passo 2** - A partir do período 1, lançamos o valor dos juros que é igual à taxa de juros de 10% a.a. vezes o saldo devedor.

Os juros são sempre calculados sobre o saldo devedor no período.

$$J_1 = 100\ 000 \cdot 10\%$$

$$J_1 = 10\ 000$$

Ano (k)	Saldo Devedor (S _{dk})	Amortização (A _k)	Juros (J _k =iS _{dk} -1)	Prestação (A _k +J _k)
0	100.000,00	-	-	-
1			10.000,00	10.000,00

• **Passo 3** - O valor a ser amortizado é nulo, durante a carência não há amortização.

Ano (k)	Saldo Devedor (S _{dk})	Amortização (A _k)	Juros (J _k =iS _{dk} -1)	Prestação (A _k +J _k)
0	100.000,00	-	-	-
1		0	10.000,00	10.000,00

• **Passo 4** - O valor do saldo devedor, isto é, o valor do financiamento menos a parte que foi amortizada:

$$\text{Saldo devedor } S_d = 100.000 - 0$$

$$S_d = 100.000,00$$

Ano (k)	Saldo Devedor (Sdk)	Amortização (Ak)	Juros (Jk=iSdk-1)	Prestação (Ak+Jk)
0	100.000,00	-	-	-
1	100.000,00	0	10.000,00	10.000,00

• **Passo 5** - As mesmas operações, repetidas no período 2, gera a seguinte tabela:

Vejam que quando a carência terminar as parcelas pagas passam a ser de R\$ 26.379,75.

	Saldo Devedor (Sdk)	Amortização (Ak)	Juros (Jk=iSdk-1)	Prestação (R=Ak+Jk)
0	100.000,00	-	-	-
1	100.000,00	-	10.000,00	10.000,00
2	100.000,00	-	10.000,00	10.000,00
3	83.620,25	16.379,75	10.000,00	26.379,75
4	65.602,53	18.017,72	8.362,03	26.379,75
5	45.783,03	19.819,50	6.560,25	26.379,75
6	23.981,58	21.801,45	4.578,30	26.379,75
7	-	23.981,58	2.398,16	26.379,74
Total	-	100.000,00	51.898,74	151.898,74

Observem que durante o período de carência apenas os juros estão sendo pagos, ou seja, o valor da prestação durante a carência é apenas o valor dos juros sobre o saldo devedor.

Findo o prazo de carência voltamos à mesma situação do exemplo anterior. Vejam ainda que independente de ter carência ou não a soma das amortizações precisa ser igual ao valor do capital emprestado inicialmente.

CASO B:

Os juros não serão pagos durante o período de carência. Serão acrescidos ao saldo devedor.

Devemos, inicialmente, capitalizar o saldo devedor à taxa de 10% a.a., durante os 3 anos de carência. Isso porque a amortização deve começar no fim do 3º ano de carência:

Calculamos os juros e o adicionamos ao saldo devedor. Nesse caso não há prestações durante o prazo de carência.

Agora vamos construir a planilha.

• **Passo 1** - No período zero, ou seja, no momento do financiamento, o único valor disponível é o saldo devedor da dívida (R\$100.000,00).

Ano (k)	Saldo Devedor (Sdk)	Amortização (Ak)	Juros (Jk=iSdk-1)	Prestação (Ak+Jk)
0	100.000,00	-	-	-

• **Passo 2** - A partir do período 1, lançamos o valor dos juros que é igual à taxa de juros de 10% a.a. vezes o saldo devedor.

Os juros são sempre calculados sobre o saldo devedor no período.

$$J_1 = 100.000 \times 10\%$$

$$J_1 = 10.000$$

Ano (k)	Saldo Devedor (Sdk)	Amortização (Ak)	Juros (Jk=iSdk-1)	Prestação (Ak+Jk)
0	100.000,00	-	-	-
1			10.000,00	-

• **Passo 3** - O valor a ser amortizado é nulo. Durante a carência não há amortização. E nesse caso os juros também não serão pagos.

Ano (k)	Saldo Devedor (Sdk)	Amortização (Ak)	Juros (Jk=iSdk-1)	Prestação (Ak+Jk)
0	100.000,00	-	-	-
1		0	10.000,00	0

• **Passo 4** - O valor do saldo devedor, isto é, o valor do financiamento mais os juros do período.

$$\text{Saldo devedor } S_d = 100.000 + 10.000$$

$$S_d = 110.000,00$$

Ano (k)	Saldo Devedor (Sdk)	Amortização (Ak)	Juros (Jk=iSdk-1)	Prestação (Ak+Jk)
0	100.000,00	-	-	-
1	110.000,00	0	10.000,00	10.000,00

• **Passo 5** - As mesmas operações, repetidas no período 2, geram a tabela seguinte.

Vejam que quando a carência terminar, as parcelas pagas passam a ser de:

$$S_1 = 100.000,00(1,10) = 110.000,00$$

$$S_2 = 100.000,00(1,10)^2 = 121.000,00$$

Ano (k)	Saldo Devedor (Sdk)	Amortização (Ak)	Juros (Jk=iSdk-1)	Prestação (R=Ak+Jk)
0	100.000,00	-	-	-
1	110.000,00	-	-	-
2	121.000,00	-	-	-

Sobre esse saldo devedor, calcula-se o valor da prestação:

Vamos agora calcular o fator:

$$a_{5 \rightarrow 0,10} = \frac{(1,10)^5 - 1}{0,10(1,10)^5}$$

$$a_{5 \rightarrow 0,10} = \frac{1.61051 - 1}{0,10 \cdot 1.61051}$$

$$a_{5 \rightarrow 0,10} = \frac{0.61051}{0,161051}$$

$$a_{5 \rightarrow 0,10} = 3.790787$$

$$R \cong \frac{PV}{a_{n|i}}$$

$$R = \frac{121.000,00}{3.790787}$$

$$R = 31.919,49$$

A partir da prestação, o cálculo segue o Sistema Francês normalmente.

Ano (k)	Saldo Devedor (Sdk)	Amortização (Ak)	Juros (Jk=iSdk-1)	Prestação (R=Ak+Jk)
0	100.000,00	-	-	-
1	110.000,00	-	-	-
2	121.000,00	-	-	-
3	101.180,51	19.819,49	12.100,00	31.919,49
4	79.379,07	21.801,44	10.118,05	31.919,49
5	55.397,49	23.981,58	7.937,91	31.919,49
6	29.017,75	26.379,74	5.539,75	31.919,49
7	-	29.017,75	2.901,78	31.919,53
Total	-	121.000,00	38.597,49	159.597,49

Vejam que neste caso a soma das amortizações totalizou o empréstimo inicial mais os juros durante o período de carência, já que esses não foram pagos.

Exercícios resolvidos

1) Um empréstimo de R\$ 1.000,00 será pago pelo Sistema price em 4 prestações mensais, sem entrada. Sabendo-se que a taxa de juros é de 10% ao mês, construir a planilha.

Resolução:

$$PV = R\$ 1.000$$

$$i = 10\% \text{ a. m.}$$

$$n = 4$$

$$R = ?$$

Calculamos agora o valor de cada prestação pela fórmula.

$$PV = R \cdot a_{n|i}$$

$$\text{Então, temos: } R = \frac{PV}{a_{n|i}}$$

Vamos agora calcular o fator:

$$a_{4 \rightarrow 0,10} = \frac{(1,10)^4 - 1}{0,10(1,10)^4}$$

$$a_{4 \rightarrow 0,10} = \frac{1.4641 - 1}{0,10 \cdot 1.4641}$$

$$a_{4 \rightarrow 0,10} = \frac{0.4641}{0,14641}$$

$$a_{4 \rightarrow 0,10} \cong 3.169865$$

$$R = \frac{100.000}{3.169865}$$

$$R = 315,47$$

Agora construímos a planilha de amortização conforme os modelos acima. Calculamos os juros. Os juros pagos na primeira prestação são sobre o saldo devedor inicial de R\$ 1.000,00.

$$J_1 = 1000 \cdot 0,1 = R\$ 100$$

O valor amortizado na primeira prestação é, portanto, a diferença, ou seja: R\$ 315,47 – R\$ 100 = R\$ 215,47.

O saldo devedor após o pagamento da primeira prestação é, portanto, a diferença: R\$ 1.000 – R\$ 215,47 = R\$ 784,53.

Seguindo o mesmo procedimento para os demais pagamentos temos a planilha:

Ano (k)	Saldo Devedor (S _{dk})	Amortização (A _k)	Juros (J _k =iS _{dk} -1)	Prestação (A _k +J _k)
0	R\$ 1.000,00	-	-	-
1	R\$ 784,53	R\$ 215,47	100,00	R\$ 315,47
2	R\$ 547,51	R\$ 237,02	78,45	R\$ 315,47
3	R\$ 286,79	R\$ 260,72	54,75	R\$ 315,47
4	R\$ 0,00	R\$ 286,79	28,68	R\$ 315,47
Total				

Vejam que a cada prestação paga, o valor dos juros diminui enquanto o valor de amortização aumenta.

2) Financiamento de um veículo pelo sistema de prestações fixas (price) conforme os dados da planilha.

PV = 11.988,36 (valor financiado)

$i = 1,71\%$ a mês (taxa de juros)

$n = 48$ meses

$R = 368,14$

Valor financiado: R\$ 11.988,36				
Juros mensal: 1,71%				
Parcelas: 48				
Meses	Saldo Dev.	Amort.	Juros	Prestação
0	R\$ 11.988,36			
1	R\$ 11.825,22	R\$ 163,14	R\$ 205,00	R\$ 368,14
2	R\$ 11.659,29	R\$ 165,93	R\$ 202,21	R\$ 368,14
3	R\$ 11.490,53	R\$ 168,77	R\$ 199,37	R\$ 368,14
4	R\$ 11.318,87	R\$ 171,65	R\$ 196,49	R\$ 368,14
5	R\$ 11.144,29	R\$ 174,59	R\$ 193,55	R\$ 368,14
6	R\$ 10.966,72	R\$ 177,57	R\$ 190,57	R\$ 368,14
7	R\$ 10.786,11	R\$ 180,61	R\$ 187,53	R\$ 368,14
8	R\$ 10.602,41	R\$ 183,70	R\$ 184,44	R\$ 368,14
9	R\$ 10.415,57	R\$ 186,84	R\$ 181,30	R\$ 368,14
10	R\$ 10.225,54	R\$ 190,03	R\$ 178,11	R\$ 368,14
11	R\$ 10.032,25	R\$ 193,28	R\$ 174,86	R\$ 368,14
12	R\$ 9.835,67	R\$ 196,59	R\$ 171,55	R\$ 368,14
13	R\$ 9.635,72	R\$ 199,95	R\$ 168,19	R\$ 368,14
14	R\$ 9.432,35	R\$ 203,37	R\$ 164,77	R\$ 368,14
15	R\$ 9.225,50	R\$ 206,85	R\$ 161,29	R\$ 368,14
16	R\$ 9.015,12	R\$ 210,38	R\$ 157,76	R\$ 368,14
17	R\$ 8.801,14	R\$ 213,98	R\$ 154,16	R\$ 368,14
18	R\$ 8.583,49	R\$ 217,64	R\$ 150,50	R\$ 368,14
19	R\$ 8.362,13	R\$ 221,36	R\$ 146,78	R\$ 368,14
20	R\$ 8.136,99	R\$ 225,15	R\$ 142,99	R\$ 368,14
21	R\$ 7.907,99	R\$ 229,00	R\$ 139,14	R\$ 368,14
22	R\$ 7.675,07	R\$ 232,91	R\$ 135,23	R\$ 368,14
23	R\$ 7.438,18	R\$ 236,90	R\$ 131,24	R\$ 368,14
24	R\$ 7.197,23	R\$ 240,95	R\$ 127,19	R\$ 368,14
25	R\$ 6.952,16	R\$ 245,07	R\$ 123,07	R\$ 368,14
26	R\$ 6.702,91	R\$ 249,26	R\$ 118,88	R\$ 368,14
27	R\$ 6.449,39	R\$ 253,52	R\$ 114,62	R\$ 368,14
28	R\$ 6.191,53	R\$ 257,86	R\$ 110,28	R\$ 368,14
Total	até a 28	R\$ 5.796,83	R\$ 4.511,09	R\$ 10.307,91
29	R\$ 5.929,27	R\$ 262,26	R\$ 105,88	R\$ 368,14
30	R\$ 5.662,52	R\$ 266,75	R\$ 101,39	R\$ 368,14
31	R\$ 5.391,21	R\$ 271,31	R\$ 96,83	R\$ 368,14

32	R\$ 5.115,26	R\$ 275,95	R\$ 92,19	R\$ 368,14
33	R\$ 4.834,59	R\$ 280,67	R\$ 87,47	R\$ 368,14
34	R\$ 4.549,12	R\$ 285,47	R\$ 82,67	R\$ 368,14
35	R\$ 4.258,77	R\$ 290,35	R\$ 77,79	R\$ 368,14
36	R\$ 3.963,45	R\$ 295,31	R\$ 72,82	R\$ 368,14
37	R\$ 3.663,09	R\$ 300,36	R\$ 67,78	R\$ 368,14
38	R\$ 3.357,59	R\$ 305,50	R\$ 62,64	R\$ 368,14
39	R\$ 3.046,86	R\$ 310,73	R\$ 57,41	R\$ 368,14
40	R\$ 2.730,83	R\$ 316,04	R\$ 52,10	R\$ 368,14
41	R\$ 2.409,38	R\$ 321,44	R\$ 46,70	R\$ 368,14
42	R\$ 2.082,44	R\$ 326,94	R\$ 41,20	R\$ 368,14
43	R\$ 1.749,91	R\$ 332,53	R\$ 35,61	R\$ 368,14
44	R\$ 1.411,70	R\$ 338,22	R\$ 29,92	R\$ 368,14
45	R\$ 1.067,70	R\$ 344,00	R\$ 24,14	R\$ 368,14
46	R\$ 717,82	R\$ 349,88	R\$ 18,26	R\$ 368,14
47	R\$ 361,95	R\$ 355,87	R\$ 12,27	R\$ 368,14
48	R\$ (0,00)	R\$ 361,95	R\$ 6,19	R\$ 368,14
Total		R\$ 11.988,36	R\$ 5.682,35	R\$ 17.670,71

Vejam que quando vocês têm a planilha do financiamento, vocês podem verificar sempre que quiser o quanto ainda resta de saldo devedor e o quanto já pagou de juros até aquele momento.

Por exemplo: Quanto ainda devo do carro após ter pago 28 parcelas?

$$Sd_k = R \cdot \left[\frac{(1+i)^{n-k}-1}{i(1+i)^{n-k}} \right]$$

Essa fórmula nos dá o quanto ainda devemos depois de ter pago k parcelas. Ou seja, qual o nosso saldo devedor. (k representa o número de parcelas que já foram pagas).

$$Sd_{28} = 368,14 \cdot \left[\frac{(1+0,0171)^{48-28}-1}{0,0171(1+0,0171)^{48-28}} \right]$$

$$Sd_{28} = 368,14 \cdot \left[\frac{(1,0171)^{20}-1}{0,0171(1,0171)^{20}} \right]$$

$$Sd_{28} = 368,14 \cdot \left[\frac{1,403696-1}{0,0171(1,403696)} \right]$$

$$Sd_{28} = 368,14 \cdot \left[\frac{0,403696}{0,024003} \right]$$

$$Sd_{28} = 368,14 \cdot 16,818422$$

$$Sd_{28} = 6.191,53$$

Vejam que esse valor aparece na tabela para $n = 28$. Quanto já paguei de juros após o pagamento dessas 28 parcelas? Recorrendo a tabela, veja que já pagamos R\$ 4.511,09 de juros. Podemos calcular assim:

Como já pagamos 28 parcelas de R\$ 368,14, tem-se:

$$\text{Total pago} = 28 \times 368,14$$

$$\text{Total pago} = 10.307,91$$

A nossa dívida inicial era de R\$ 11.988,36. Ainda devemos R\$ 6.191,53. Foi amortizado até a 28ª parcela:

$$A = 11.988,36 - 6.191,53$$

$$A = 5.796,83$$

Como cada parcela é a soma da Amortização mais os juros, temos que:

$$\text{Juros pagos} = \text{total pago} - \text{amortização}$$

$$\text{Juros pagos: } J = 10.307,91 - 5.796,83$$

$$J = 4.511,09$$

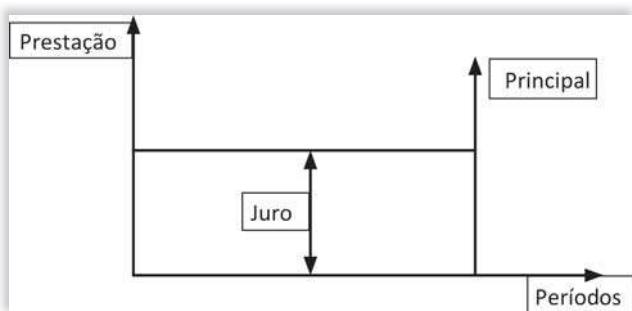
2 - Sistema americano (SA): definições e exemplos

No Sistema Americano (SA), o mutuário obriga-se a devolver o montante principal em uma só vez, após ter decorrido o prazo de carência estipulado. Os juros podem ser pagos durante a carência ou capitalizados e devolvidos juntamente com o principal.

Assim, temos que:

- Após certo prazo, o devedor paga o empréstimo em uma única parcela.
- Em geral, os juros são pagos durante a carência.

Representação



Sistema Americano (SA), com devolução dos juros durante a carência

Exemplo:

1) Um banco empresta \$ 100.000,00 a uma empresa, a uma taxa de juros de 6% a.s. (ao semestre) com prazo de utilização unitário, para ser devolvido após uma carência de 2 anos. Sabendo-se que os

juros serão cobrados semestralmente, calcular a planilha pelo sistema americano.

• Dados do problema:

Saque:

$$PV = 100.000,00$$

$$n = 4 \text{ semestres (2 anos)}$$

$$i = 6\% \text{ ao semestre.}$$

• **Resolução:** Como já é dada a taxa em termos semestrais, temos:

• **Passo 1** - No período zero, ou seja, no momento do financiamento, o único valor disponível é o saldo devedor da dívida (\$100.000,00).

Ano (t_k)	Saldo Devedor (Sd_k)	Amortização (A_k)	Juros ($J_k = iSd_{k-1}$)	Prestação ($A_k + J_k$)
0	100.000,00	-	-	-

• **Passo 2** - A partir do período 1, lançamos o valor dos juros que é igual à taxa de juros de 6% a.s. vezes o saldo devedor.

Os juros são sempre calculados sobre o saldo devedor no período.

$$J_1 = 100.000 \times 6\%$$

$$J_1 = 6.000$$

Ano (t_k)	Saldo Devedor (Sd_k)	Amortização (A_k)	Juros ($J_k = iSd_{k-1}$)	Prestação ($A_k + J_k$)
0	100.000,00	-	-	-
1		0	6.000,00	6.000,00

O valor da prestação será igual ao valor dos juros, pois os juros serão pagos no período de carência.

• **Passo 3** - O valor a ser amortizado, isto é, o valor destinado para redução do saldo devedor é a diferença entre o prestação e os juros. Neste sistema, a amortização será feita em uma única vez no último período.

Ano (t_k)	Saldo Devedor (Sd_k)	Amortização (A_k)	Juros ($J_k = iSd_{k-1}$)	Prestação ($A_k + J_k$)
0	100.000,00	-	-	-
1	100.000,00	0	6.000,00	6.000,00

Vejam que o saldo devedor permanece o mesmo, pois foi efetuado o pagamento dos juros e também não houve amortização.

• **Passo 5** - As mesmas operações, repetidas no período 2, geram a seguinte tabela:

Ano (t_k)	Saldo Devedor (Sd_k)	Amortização (A_k)	Juros (J_k)	Prestação ($A_k + J_k$)
0	100.000,00	-	-	-
1	100.000,00	-	6.000,00	6.000,00
2	100.000,00	-	6.000,00	6.000,00
3	100.000,00	-	6.000,00	6.000,00
4	-	100.000,00	6.000,00	106.000,00
Total	-	100.000,00	24.000,00	124.000,00

Percebemos, por esse exemplo, que o principal foi quitado em uma única vez no final dos dois anos. Devemos observar que os pagamentos são semestrais no final de cada seis meses a contar da data do empréstimo. Os juros não foram capitalizados. Foram pagos no final de cada período.

- Sistema Americano (SA), com a capitalização dos juros

Exemplo:

1) Seja o mesmo exemplo do item anterior, em que se admite a capitalização dos juros durante a carência.

• Dados do problema:

Saque:

$$PV = 100.000,00$$

$$n = 4 \text{ semestres (2 anos)}$$

$$i = 6\% \text{ ao semestre}$$

• **Resolução:** Como já é dada a taxa em termos semestrais, temos:

• **Passo 1** - No período zero, ou seja, no momento do financiamento, o único valor disponível é o saldo devedor da dívida (\$100.000,00).

Ano (t_k)	Saldo Devedor (Sd_k)	Amortização (A_k)	Juros ($J_k = iSd_{k-1}$)	Prestação ($A_k + J_k$)
0	100.000,00	-	-	-

• **Passo 2** - A partir do período 1, lançamos o valor dos juros que é igual à taxa de juros de 6% a.s. vezes o saldo devedor.

Os juros são sempre calculados sobre o saldo devedor no período:

$$J_1 = 100.000 \times 6\%$$

$$J_1 = 6.000$$

Ano (t_k)	Saldo Devedor (Sd_k)	Amortização (A_k)	Juros ($J_k = iSd_{k-1}$)	Prestação ($A_k + J_k$)
0	100.000,00	-	-	-
1		0	6.000,00	0

O valor da prestação será igual a zero, pois os juros não serão pagos no período de carência.

• **Passo 3** - O valor a ser amortizado, isto é, o valor destinado para redução do saldo devedor

é a diferença entre o prestação e os juros. Neste sistema, a amortização será feita em uma única vez no último período.

Ano (t_k)	Saldo Devedor (Sd_k)	Amortização (A_k)	Juros ($J_k = iSd_{k-1}$)	Prestação ($A_k + J_k$)
0	100.000,00	-	-	-
1	106.000,00	0	6.000,00	0

Vejam que o saldo devedor foi alterado, pois foi efetuado o cálculo dos juros que não foram pagos, logo serão incluídos no saldo devedor. E, também, não houve amortização.

• **Passo 5** - As mesmas operações, repetidas no período 2, geram a seguinte tabela:

Juros sempre sobre o saldo devedor:

$$J_2 = 106.000,6\%$$

$$J_2 = 3.360,00$$

Vejam que como esses juros não serão pagos, eles precisam ser somados ao saldo devedor.

Ano (t_k)	Saldo Devedor (Sd_k)	Amortização (A_k)	Juros (J_k)	Prestação ($A_k + J_k$)
0	100.000,00	-	-	-
1	106.000,00	-	-	-
2	112.360,00	-	-	-
3	119.101,60	-	-	-
4	-	100.000,00	26.247,70	126.247,70
Total	-	100.000,00	26.247,70	126.247,70

• Do período 3 para o período 4, calculamos os juros:

$$J = 119.101,60 \cdot 6\%$$

$$J = 7.146,10$$

• Devem ser incluídos ao saldo devedor, então teremos:

$$\text{Saldo devedor final} = 119.101,60 + 7.146,10 = 126.247,70$$

• Mas, na data 4, acaba o período e a dívida precisa ser quitada.

Só para entender a tabela:

A nossa dívida que era, inicialmente, de R\$ 100.000,00. Agora é de R\$ 126.247,70. Temos, então, de juros:

$$J = 126.247,70 - 100.000,00$$

$$J = 26.247,70$$

Vejam que na linha 4, foi lançado a amortização de R\$ 100.000,00, os juros de R\$ 26.247,70 e uma prestação de R\$ 126.247,70. O que quita toda a dívida. Por isso, o saldo devedor nessa linha ficou zerado.

Neste caso, os juros foram sendo incluídos ao capital. A quitação total da dívida se fez em uma única vez. Percebiam ainda que não houve pagamento algum durante o período de carência.

Exercícios resolvidos

1- Um financiamento no valor de R\$ 20.000,00 é concedido para ser amortizado em 4 pagamentos mensais, pelo Sistema Americano. A taxa de juros contratada é de 2% ao mês. E os juros serão pagos no final de cada mês. Com base nestas informações, pede-se para construir a planilha.

- Dados do problema:

Saque:

$$PV = 20.000,00$$

$$n = 4 \text{ meses}$$

$$i = 2\% \text{ ao mês}$$

$$J_1 = 20.000,00 \cdot 2\%$$

$$J_1 = 400,00$$

Ano (t_k)	Saldo Devedor (Sd_k)	Amortização (A_k)	Juros (J_k)	Prestação ($A_k + J_k$)
0	20.000,00	-	-	-
1	20.000,00	-	400,00	400,00
2	20.000,00	-	400,00	400,00
3	20.000,00	-	400,00	400,00
4	-	20.000,00	400,00	20.400,00
Total	-	20.000,00	1.600,00	21.600,00

2) Admita que um empréstimo de R\$ 150.000,00 deva ser pago, dentro de um prazo de 6 meses, à taxa de 5% ao mês. Complete a planilha pelo Sistema Americano. Os juros não serão pagos durante a carência. Serão capitalizados nesse período.

- Dados do problema:

Saque:

$$PV = 150.000,00$$

$$n = 6 \text{ meses}$$

$$i = 5\% \text{ a.m. ou } 5/100 = 0,05$$

Ano (t_k)	Saldo Devedor (Sd_k)	Amortização (A_k)	Juros ($J_k = iSd_{k-1}$)	Prestação ($R = A_k + J_k$)
0	150.000,00	-	-	-
1	157.500,00	-	-	-
2	165.375,00	-	-	-
3	173.643,75	-	-	-
4	182.325,93	-	-	-
5	191.442,22	-	-	-
6	0	150.000,00	51.014,33	201.014,33
Total	-	150.000,00	51.014,33	201.014,33

Chegamos, assim, ao final da sétima aula. Espero que agora tenha ficado mais claro o entendimento de vocês sobre as características do Sistema Francês e do Sistema Americano.

Retomando a aula

Chegamos, assim, ao final da oitava aula. Espero que agora tenha ficado mais claro o entendimento de vocês sobre o Projeto Político Pedagógico. Vamos, então, recordar:

1 - Sistema Francês ou Tabela Price: Definições e Exemplos

Vimos que o Sistema Francês ou Tabela Price é um processo de amortização de dívidas, com prestações iguais.

2 - Sistema Americano (SA): Definições e Exemplos

Nessa seção, vimos que no Sistema Americano (SA) o devedor se compromete a pagar o empréstimo em uma única parcela e, em geral, os juros são pagos durante a carência.

Vale a pena

Vale a pena ler



CAVALHEIRO, L.A. F. *Elementos de matemática financeira: Operações a curto e a longo prazo*. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 1992.

CRESPO, A.A. *Matemática comercial e financeira fácil*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 1992.

D'AMBRÓSIO, N. & D'AMBROSIO U. *Matemática comercial e financeira*. São Paulo: Nacional, 1980.

Vale a pena acessar



Somatemática. Disponível em: <www.somatematica.com.br>

Matemática didática. Disponível em: <www.matematicadidatica.com.br>



SAC-SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE

Sistema de Amortização Constante (SAC)

Muito utilizado no financiamento para aquisição de imóveis através do Sistema Financeiro de Habitação.

O sistema de Amortização Constante (SAC), apresenta as seguintes características:

Amortização embutido em cada prestação é constante

$$A = \frac{VP}{n} = \frac{E}{n}$$

n é o número de prestações do financiamento

$E(VP)$ é o valor do financiamento (EMPRÉSTIMO)

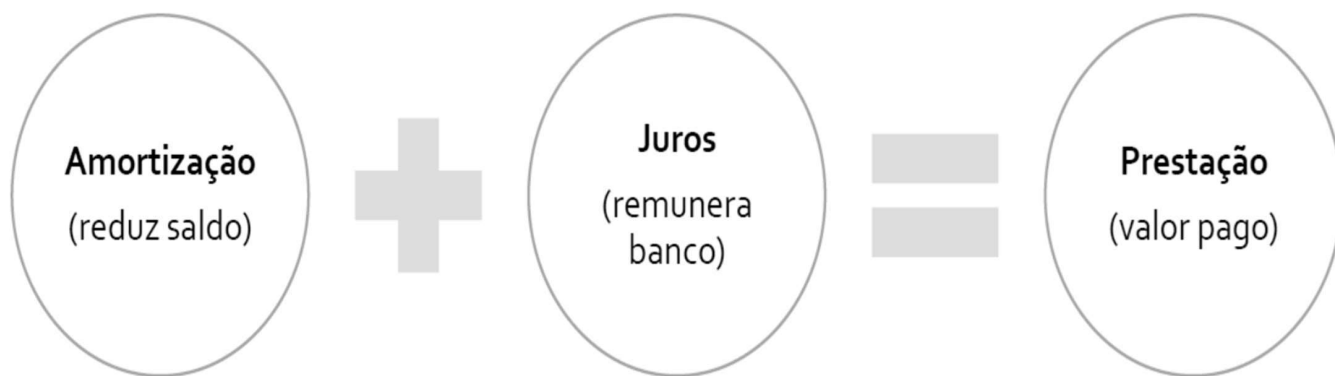
Prestações decrescentes (amortização fixa e juros decrescentes) sob a forma de progressão aritmética.

$$P = A + J$$

$$Juros =$$

Saldo devedor decrescente sob a forma de progressão aritmética(P.A).

Última cota de amortização igual ao saldo devedor após o pagamento da penúltima prestação.



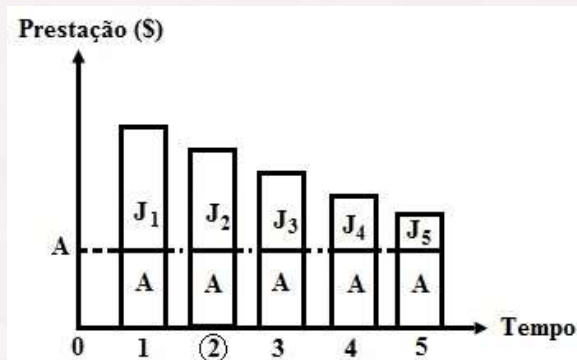
AMORTIZAÇÕES: devolução do capital emprestado, isto é, a parte da prestação que está abatendo o valor inicial tomado sem o cômputo dos juros.

JUROS: parte da prestação que remunera o “dono do dinheiro” pelo empréstimo, ou seja, é o que se cobra pelo “do dinheiro. São calculados sobre o saldo devedor do período anterior.



Prof. Sormany Barreto

@exatas_pragabaritar



Prof. Sormany Barreto

@exatas_pragabaritar



Exemplo:

Um empréstimo de R\$ 200.000 será amortizado pelo Sistema de Amortização Constante (em 5 prestações mensais à taxa de 10%a m).

Período	Saldo Devedor	Juros	Amortização	Prestação
0	200.000,00			
1				
2				
3				
4				
5				

**DICAS-MÉTODO SORMANY****Juros da última Prestação=****Razão da prestação e do Juros=****SALDO DEVEDOR=**



SAC-SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE QUESTÕES

1)CESGRANRIO - Escriturário (BB)/Agente Comercial/2021/"Prova B"

Um banco ofereceu a um cliente um financiamento de R\$ 120.000,00, pelo sistema SAC, a uma taxa de juros de 10% a.m., para ser pago em 4 prestações mensais ao final de cada mês, sendo a primeira prestação no valor de R\$ 42.000,00. A Tabela abaixo poderá ser usada para seus cálculos.

Período	Saldo Inicial	Juros	Amortização	Prestação	Saldo Final
0					120.000,00
1	120.000,00			42.000,00	
2					
3					
4					

Quais os valores aproximados que serão pagos, pelo cliente, a título de juros e prestação, respectivamente, ao final do terceiro mês?

- A) R\$ 12.000,00; R\$ 42.000,00 B) R\$ 3.000,00; R\$ 39.000,00 C) R\$ 12.000,00; R\$ 30.000,00
D) R\$ 6.000,00; R\$ 36.000,00 E) R\$ 9.000,00; R\$ 33.000,00

2)CESGRANRIO - Profissional (LIQUIGÁS)/Júnior/Ciências Contábeis/2018/Edital 01

Entre os sistemas de amortização de financiamentos disponíveis, há um em que, na sistemática de pagamentos, as prestações (parcelas) são decrescentes, e o valor financeiro dos juros cobrados na parcela é menor em relação ao cobrado na parcela anterior.

Tais características são do seguinte sistema de amortização:

A)Americano B)constante C)descontado D)francês E)tabela price

3)CESGRANRIO - Profissional Júnior (BR)/Ciências Contábeis/2018

Uma empresa obtém financiamento bancário de R\$ 100.000 com pagamento em 5 parcelas determinadas pelo Sistema de Amortizações Constantes – SAC. O quadro a seguir mostra o esquema de amortização utilizado, ou seja, parcela do principal, juros, prestação total e o saldo devedor apurado após a liquidação de cada prestação.

			PRESTAÇÃO	SALDO
MESES	PRINCIPAL	JUROS	TOTAL	DEVEDOR
				100.000
1	20.000	1.000	21.000	80.000
2	20.000	800	20.800	60.000
3	20.000	600	20.600	40.000
4				
5				

Completando o quadro, os valores, em reais, correspondentes às prestações totais 4 e 5 serão, respectivamente,

A)20.000 e 20.600 B)20.200 e 20.400 C)20.400 e 20.200 D)20.600 e 20.000
E)20.600 e 20.400

4)(CESGRANRIO-ELETROBRAS)

Um empréstimo de R\$ 1.000,00, à taxa de 10% a.a., será pago em 5 prestações anuais. O valor da primeira prestação, a pagar pelo Sistema de Amortização Constante, e o saldo devedor, após esse pagamento, serão, em reais, respectivamente de

- a) 200,00 e 800,00
- b) 200,00 e 900,00
- c) 300,00 e 700,00
- d) 300,00 e 800,00
- e) 300,00 e 900,00

5)(Petrobras-Cesgranrio Analista de Comercialização e Logística Júnior-07/12/2014)

Um financiamento de 50 mil reais, contratado com juros efetivos de 12% ao ano, será pago em 48 prestações mensais pelo Sistema de Amortização Constante (SAC).

Sendo assim, o saldo devedor após o 36º pagamento, em reais, será

- (A) 12.500,00 (B) 19.600,00 (C) 21.600,00
(D) 25.600,00 (E) 37.500,00

6)CESGRANRIO - Escriturário (BB)/Agente Comercial/2021/"Prova C"

Uma pessoa faz um financiamento no valor de R\$10.000,00 em 10 vezes, a uma taxa de juros de 4,9% ao mês, sendo que o financiamento usa o sistema de amortização constante.

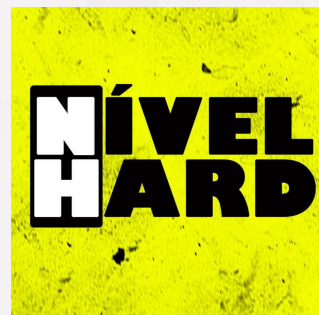
Qual é o valor, em reais, a ser pago na 7ª prestação desse financiamento?

A)1.490 B)1.334 C)1.292 D)1.196 E)1.100

7)CESGRANRIO - Técnico Bancário Novo (CEF)/"Sem Área"/2021/PcD (e mais 1 concurso)

Um empréstimo deve ser pago pelo sistema SAC em 5 parcelas mensais com juros de 3% ao mês. Se a terceira parcela paga no financiamento do empréstimo for igual a R\$26.160,00, o valor total do empréstimo, em reais, será de

A)120.000,00 B)124.000,00 C)128.500,00 D)132.800,00 E)135.600,00



8) CESGRANRIO - Profissional Petrobras de Nível Superior (PETROBRAS)/Engenharia de Petróleo

Um empréstimo de R\$ 12.000,00 será pago, sem entrada, pelo Sistema de Amortização Constante (SAC), em 3 prestações mensais.

A taxa de juros, no regime de juros compostos, é de 2% ao mês.

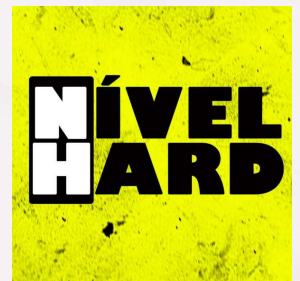
O valor da última prestação é, em reais, de

A) 4.000,00 B) 4.080,00 C) 4.160,00 D) 4.240,00 E) 4.380,00

9) Escriturário (BB)/Agente Comercial/2010/1

Considere um financiamento de R\$ 100.000,00, sem entrada, a ser pago em 100 prestações mensais, pelo Sistema de Amortização Constante (SAC). Sabendo-se que a taxa de juros, no regime de juros compostos, é de 1% ao mês, a prestação inicial, se o prazo de pagamento for duplicado, será reduzida em

A) 100%. B) 50%. C) 25%. D) 10%. E) 5%.



10)CESGRANRIO - Analista de Gestão Corporativa (EPE)/Finanças e Orçamento/2010

Se uma pessoa pagasse uma dívida em prestações mensais usando o Sistema de Amortização Constante (SAC), pagaria prestações sucessivas

- A)iguais.
- B)crescentes.
- C)com parcelas de amortização crescentes.
- D)com parcelas de juros decrescentes.
- E)com juros apenas na última.

11)(LIQUIGÁS)/Economia/Júnior/2018/Edital 02

Um imóvel no valor de R\$ 6.000.000,00 de reais foi adquirido em dezembro de 2018 por meio de um financiamento baseado em um sistema de amortização constante (SAC), em 120 parcelas mensais e decrescentes. A taxa de juro cobrada foi de 1,0% ao mês, com a primeira prestação para janeiro de 2019 e a última para dezembro de 2028.

Considere que o comprador deu uma entrada no ato da compra, financiando apenas 80% do valor do imóvel.

Assim, o valor da prestação previsto para fevereiro de 2019, em reais, é igual a

- A)88.000,00 B)87.600,00 C)78.600,00 D)68.000,00 E)48.600,00

12)(CESGRANRIO – BANCO DO BRASIL – 2015)

Arthur contraiu um financiamento para a compra de um apartamento, cujo valor à vista é de 200 mil reais, no Sistema de Amortização Constante (SAC), a uma taxa de juros de 1% ao mês, com um prazo de 20 anos. Para reduzir o valor a ser financiado, ele dará uma entrada no valor de 50 mil reais na data da assinatura do contrato. As prestações começam um mês após a assinatura do contrato e são compostas de amortização, juros sobre o saldo devedor do mês anterior, seguro especial no valor de 75 reais mensais fixos no primeiro ano e despesa administrativa mensal fixa no valor de 25 reais. A partir dessas informações, o valor, em reais, da segunda prestação prevista na planilha de amortização desse financiamento, desconsiderando qualquer outro tipo

de reajuste no saldo devedor que não seja a taxa de juros do financiamento, é igual a

(A) 2.087,25 (B) 2.218,75 (C) 2.175,25 (D) 2.125,00 (E) 2.225,00

13)CESGRANRIO - Profissional (LIQUIGÁS)/Economia/Júnior/2018/Edital 02

Um financiamento de 1.000 unidades monetárias (u.m.) deverá ser quitado em dez meses, em dez prestações mensais e sucessivas, a primeira começando um mês após a obtenção do financiamento. O cálculo das prestações será feito pelo Sistema de Amortização Constante (SAC), usando a taxa de juros de 1% ao mês.

A primeira e a segunda prestações devidas terão os valores respectivos, em u.m., de
(A)90 e 100 (B)100 e 110 (C)110 e 100 (D)110 e 109 (E)100 e 100

14)CESGRANRIO - Arquiteto (CEF)/2012 (e mais 4 concursos)

O máximo da remuneração mensal que um indivíduo pode comprometer para pagamento das prestações de empréstimos é de R\$ 2.000,00 e, em função da idade, tabelas atuariais limitam o prazo do empréstimo em 100 meses.

Considerando taxa de juros de 1% ao mês, qual é o valor da amortização para o maior empréstimo que ele pode tomar pelo Sistema de Amortização Constante (SAC)?

A)R\$ 1.000,00 B)R\$ 1.300,00 C)R\$ 1.500,00 D)R\$ 1.700,00 E)R\$ 2.000,00

**15)CESGRANRIO - Profissional Petrobras de Nível Superior (PETROBRAS)/Administração/2010/PSP-RH-1-2015**

A PHP Participações toma hoje, no Banco XPTO, um empréstimo de R\$ 100.000,00 que deve ser pago em 5 prestações anuais, pelo sistema de amortização constante (SAC), com juros de 12% ao ano. A primeira prestação vence dentro de um ano.

A soma das cinco prestações (principal e juros) que a PHP vai pagar ao XPTO, em reais, será

A)112.000,00 B)136.000,00 C)160.000,00 D) 124.000,00 E)138.704,87





 **@exatas_pragabaritar**
 **t.me/exatas_pragabaritar**
 **youtube/exataspragabaritar**

**MUITO
OBRIGADO!**



Permutação com repetição

Permutação com repetição consiste em todos os agrupamentos ordenados que podemos formar com um conjunto finito de elementos, havendo dois ou mais que se repetem.

A **permutação com repetição** é um tipo de agrupamento estudado na [Análise Combinatória](#). Calcular a [permutação](#) é calcular a quantidade de reordenamentos possíveis que podemos formar com um conjunto finito de elementos. Quando entre esses elementos existe uma repetição, ou seja, quando há elementos repetidos nesse conjunto, temos uma permutação com repetição.

Saiba mais: [Arranjo com repetição — os reagrupamentos ordenados que podemos formar com parte dos elementos de um conjunto](#)

Resumo sobre permutação com repetição

- A permutação com repetição consiste nos ordenamentos que podemos formar com todos os n elementos de um conjunto, sendo que há elementos iguais nesse conjunto.
- Para calcular a quantidade de permutações com repetição de um conjunto com n elementos, calculamos a permutação de n e dividimos pelo produto do fatorial de quantas vezes cada um dos elementos se repete. Isso é representado pela seguinte fórmula:

$$(P_n^{k_1, k_2, \dots, k_i}) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_i!}$$

- Na permutação simples temos mais possibilidades de agrupamentos, pois a ordem dos elementos é importante.

Permutação com repetição

Permutação com repetição consiste em **todos os reordenamentos que podemos fazer com um conjunto de n elementos, sendo que há repetição entre eles**. Podemos perceber a presença da permutação com repetição em problemas envolvendo senhas, algarismos numéricos, [anagramas](#) de palavras que possuem letras repetidas, entre outros.

- **Exemplo:**

Quais são os números de 4 algarismos que podemos formar utilizando {1, 1, 5, 6}?

Resolução:

Note que temos uma repetição entre os elementos que vão compor o número. O algarismo 1 aparece duas vezes, então vamos listar os números possíveis:

1156, 1165, 1561, 1651, 5611, 6511, 5116, 6115, 5161, 6151, 1615, 1516

Há 12 números possíveis.

Fórmula da permutação com repetição

No estudo da análise combinatória, muitas vezes o interesse não está na lista de todos os reordenamentos possíveis, mas sim na quantidade de reordenamentos que podem ser formados. Para calcular a quantidade de permutações possíveis de um conjunto que possui repetições, ou seja, para calcular a permutação com repetição de um conjunto que possui n elementos, sendo que um elemento se repete k_1 vez, outro elemento se repete k_2 vezes e assim sucessivamente, utilizamos a fórmula:

$$(P_n^{k_1, k_2, \dots, k_i}) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_i!}$$

Como calcular a permutação com repetição?

Para calcular a permutação com repetição, basta encontrar o valor de n , ou seja, quantos elementos há no conjunto, e saber quantas vezes cada elemento se repete.

- **Exemplo:**

Utilizando o exemplo anterior sobre os algarismos {1, 1, 5, 6}, calcularemos o total de permutações possíveis utilizando a fórmula.

Resolução:

Sabemos que há 4 elementos, logo $n = 4$. Além disso, sabemos que o único algarismo que se repete é o 1, aparecendo 2 vezes, logo $k = 2$. Portanto:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!}$$

Então temos que:

$$P_4^2 = \frac{24}{2} = 12$$

Como vimos, há 12 permutações possíveis.

• Exemplo 2:

Quantos são os anagramas que podemos formar com a palavra MATEMÁTICA?

Resolução:

Para calcular a quantidade de anagramas possíveis, primeiramente contaremos quantas letras a palavra tem. No caso, $n = 10$.

- A letra M repete 2 vezes.
- A letra A repete 3 vezes.
- A letra T repete 2 vezes.

Assim, a quantidade de anagramas possíveis pode ser calculada por:

$$P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2!3!2!}$$

$$P_{10}^{2,3,2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$P_{10}^{2,3,2} = 151200$$

Permutação com repetição x permutação simples

A diferença entre a permutação com repetição e a permutação simples é que na **permutação simples** temos mais possibilidades de agrupamentos, pois ela não tem repetição.

A quantidade de números com três algarismos que podemos formar com os algarismos {1, 2, 2} é diferente da quantidade de números com três algarismos que podemos formar com os algarismos {1, 2, 3}.

Acontece que quando há repetição, a inversão de números repetidos não gera novos agrupamentos. Já na permutação sem repetição, a inversão dos números será um novo agrupamento, pois a ordem desses números importa.

Podemos perceber essa diferença entre permutação com repetição e permutação simples (sem repetição) com as fórmulas.

- Fórmula da permutação simples: $P_n = n!$
- Fórmula da permutação com repetição: $P_n^{k_1, k_2, \dots, k_i} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_i!}$

Saiba também: [Combinação com repetição — a combinação em que os conjuntos formados admitem repetições de elementos](#)

Exercícios resolvidos sobre permutação com repetição

Questão 1

O banco de Kárita pede para que ela crie uma senha formada só por números, com 6 algarismos. Para construir essa senha de forma que ela não esqueça, Kárita usará somente os algarismos existentes na data de nascimento do seu filho,

sendo que ele nasceu no dia 24/08/20. Nessas condições, o número de senhas distintas que ela pode formar usando os 6 algarismos contidos na data de nascimento do seu filho é:

- A) 120
- B) 180
- C) 360
- D) 450
- E) 720

Resolução:

Alternativa B

Para calcular o número de senhas possíveis, calcularemos a permutação com repetição, pois há algarismos que se repetem. Os algarismos são {2, 4, 0, 8, 0, 2}, então temos que $n = 6$. Além disso, o algarismo 0 se repete 2 vezes, e o algarismo 2 se repete 2 vezes, então, substituindo na fórmula da permutação com repetição, temos que:

$$(P_6^{2,2} = \frac{6!}{2!2!})$$

$$(P_6^{2,2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1})$$

$$(P_6^{2,2} = 180)$$

Questão 2

Durante um campeonato de vôlei, um time conseguiu 5 vitórias, 3 derrotas e 2 empates durante 10 partidas. De quantas maneiras distintas esse resultado pode ter ocorrido?

- A) 3528800
- B) 30240
- C) 15200
- D) 7560
- E) 2520

Resolução:

Alternativa E

Queremos encontrar todas as reordenamentos possíveis para as 5 vitórias, as 3 derrotas e os 2 empates. Logo, temos uma permutação com repetição:

$$(P_{10}^{5,3,2} = \frac{10!}{5!3!2!})$$

$$(P_{10}^{5,3,2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1})$$

$$(P_{10}^{5,3,2} = 2520)$$

Por Raul Rodrigues de Oliveira
Professor de Matemática

Fonte: Brasil Escola - <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/permutacao-com-elementos-repetidos.htm>

Permutação simples

Permutação simples é todos os agrupamentos ordenados que podem ser formados com todos os elementos de determinado conjunto.

A **permutação simples** é um dos tipos de agrupamentos estudados na [análise combinatória](#). Utilizamos-la para resolver situações-problema do cotidiano. Conhecemos como [permutação](#) simples todos os agrupamentos ordenados que podem ser formados com os n elementos de um conjunto. Para calcular a permutação de n elementos, representada por P_n , basta calcular o valor de $n!$, logo, temos que $P_n = n!$.

Saiba mais: [Chances de ganhar na Mega-Sena — um cálculo que envolve conceitos de análise combinatória](#)

Resumo sobre permutação simples

- A permutação simples é um tipo de agrupamento estudado na análise combinatória.
- Trata-se de agrupamentos ordenados que são formados utilizando todos os n elementos de um conjunto.
- Para calcular a permutação, utiliza-se a fórmula $P_n = n!$
- Existe também a permutação com repetição.

O que é permutação simples?

A permutação simples é um dos agrupamentos estudados na análise combinatória. Trata-se de **todos os agrupamentos ordenados que podemos formar com os n elementos de um conjunto**. No caso desse tipo de permutação, a **ordem é importante**.

Exemplo:

Uma fila é composta por 3 pessoas, Amanda, Beatriz e Caio, nessa situação, os 3 podem ser ordenados de 6 maneiras distintas. Quais são elas?

Resolução:

- Amanda, Beatriz e Caio;
- Amanda, Caio e Beatriz;
- Beatriz, Caio e Amanda;
- Beatriz, Amanda e Caio;
- Caio, Amanda e Beatriz;
- Caio, Beatriz e Amanda.

Nesse caso, foram listadas todas as permutações possíveis com esses três elementos. É importante ressaltar que, em uma permutação, a ordem dos elementos é importante, e, como vimos nesse exemplo, temos uma fila e a ordem importa.

Leia também: [Arranjo simples — todos os agrupamentos formados com \$n\$ elementos tomados de \$k\$ em \$k\$](#)

Qual a fórmula da permutação simples?

Para calcular todas as permutações possíveis com determinado conjunto, a permutação de n elementos, representada por P_n , é calculada por:

$$P_n = n!$$

Como calcular a permutação simples?

Para calcular a permutação de um conjunto com n elementos, **basta calcular o fatorial do número de elementos**, ou seja, $n!$, e calcular o fatorial de um número é realizar a [multiplicação](#) dele pelos seus antecessores.

- **Cálculos de permutação**

$$(P_2=2!=2\cdot 1=2)$$

$$(P_3=3!=3\cdot 2\cdot 1=6)$$

$$(P_4=4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24)$$

$$(P_5=5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120)$$

$$(P_6=6!=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=720)$$

$$(P_7=7!=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5040)$$

Exemplo:

Em uma urna, há 8 bolas de 8 cores distintas, então qual o número de maneiras distintas que podemos retirar essas bolas uma a uma?

Resolução:

Note que, nesse caso, estamos permutando 8 elementos dentro de um conjunto. Calcularemos então a permutação de 8 elementos.

$$(P_8=8!=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=40.320)$$

Diferença entre permutação simples e permutação com repetição

Além da simples, existe a [permutação com repetição](#). A diferença é que, quando temos uma repetição, o **total de permutações possíveis será calculado por uma fórmula diferente**.

Supondo que nós temos n elementos, e que um deles se repete k_1 vezes, o outro k_2 , e assim sucessivamente, o número de permutações que podemos formar com esses n elementos é calculado por:

$$(P_n^{k_1, k_2, \dots, k_j} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_j!})$$

Exemplo:

Quantos anagramas podemos formar com o nome BANANA?

Resolução:

Conhecemos como [anagramas](#) todos os reordenamentos possíveis que podemos criar com as letras de uma palavra, logo, estamos calculando permutações. Note que, nesse caso, a letra A se repete 3 vezes e a letra N, 2 vezes, então temos que:

$$(P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!2!})$$

$$(P_6^{3,2} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1})$$

$$(P_6^{3,2} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1})$$

$$(P_6^{3,2} = \frac{120}{2})$$

$$(P_6^{3,2} = 60)$$

Desse modo, há 60 anagramas possíveis.

Exercícios resolvidos sobre permutação simples**Questão 1**

Em uma corretora de valores, quando o cliente fica muito tempo sem utilizar o site, para voltar ao uso, é necessário que ele clique nos símbolos & * % \$ @ na ordem escolhida durante a criação da conta. Se um funcionário da corretora não sabe a ordem escolhida pelo usuário, tenta descobri-la. Supondo que não haja nenhum bloqueio por erros sucessivos, então o número máximo de tentativas necessárias para desbloquear essa conta é:

A) 5040

- B) 720
- C) 120
- D) 24
- E) 6

Resolução:

Alternativa C

Note que há, ao todo, 5 símbolos. Sabendo disso, calcularemos a permutação de 5 elementos.

Então calcularemos (P_5) :

$$(P_5=5!)$$

$$(P_5=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)$$

$$(P_5=120)$$

Desse modo, há 120 maneiras distintas de sequências possíveis para os 5 símbolos.

Questão 2

A Mega-Sena é um jogo composto por um sorteio de 6 números escolhidos entre 60 números. Para ganhar o prêmio máximo, o apostador precisa acertar os 6 números que serão sorteados, independentemente da ordem do sorteio. Ao realizar uma aposta, Pedro escolheu os números 03, 20, 38, 40, 52 e 59, então o número de maneiras distintas que os números escolhidos por Pedro podem ser sorteados, de forma que ele seja o vencedor, é:

- A) 120
- B) 360
- C) 520
- D) 720
- E) 1040

Resolução:

Alternativa D

Para calcular o total de resultados que torna Pedro vitorioso, basta fazer a permutação de 6 elementos.

$$(P_6=6!)$$

$$(P_6=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)$$

$$(P_6=720)$$

Por Raul Rodrigues de Oliveira
Professor de Matemática

Fonte: Brasil Escola - <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/permutacao-simples.htm>